Théorie spectrale des opérateurs unitaires

T. de la Rue

Master 2 MFA Rouen 2024-2025

Le cadre dans lequel on se place ici est celui d'un espace de Hilbert H, séparable, sur lequel agit un opérateur unitaire U (*i.e.* U est une bijection linéaire de H sur H qui conserve le produit scalaire). En théorie ergodique, on rencontre cette situation lorsque $H = L^2(X, \mu)$, où (X, μ, T) est un système dynamique mesuré, et $U = U_T \ : \ f \longmapsto f \circ T$. C'est en ayant à l'esprit cette interprétation que l'on va étudier certaines propriétés de U ; mais les résultats présentés ici restent valables en dehors de ce cadre ergodique.

1 Mesures spectrales

1.1 Mesure spectrale d'un élément de H

Commençons par quelques rappels. On note $\mathbb{T}$ le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on le munit de sa topologie usuelle qui en fait un espace métrisable compact. L'addition modulo 1 sur $\mathbb{T}$ en fait un groupe abélien, dont le dual peut être identifié à $\mathbb{Z}$: les *caractères* de $\mathbb{T}$ (*i.e.* les morphismes continus de $\mathbb{T}$ dans $(\mathbb{C}^*, .)$) sont les applications $\epsilon_p : \ t \mapsto e^{i2\pi pt}$, $p \in \mathbb{Z}$. C'est cette dualité avec $\mathbb{Z}$ qui est utilisée ici de façon implicite, car nous étudions le sous-groupe $(U^p)_{p\in\mathbb{Z}}$ engendré par l'opérateur unitaire U.

Rappelons que, par le théorème de Stone-Weierstrass, toute fonction continue sur $\mathbb{T}$ peut être arbitrairement bien approchée (au sens de la convergence uniforme) par une combinaison linéaire finie de caractères.

Si σ est une mesure positive finie sur $\mathbb{T}$, ses *coefficients de Fourier* sont les nombres $\widehat{\sigma}(p)$, $p \in \mathbb{Z}$, définis par

$$\widehat{\sigma}(p) := \int_{\mathbb{T}} e^{-i2\pi pt} \, d\sigma(t).$$

L'espace des mesures finies positives sur $\mathbb{T}$ est muni de la topologie de la convergence faible, qui est caractérisée par

$$\sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma \iff \forall p \in \mathbb{Z},\ \widehat{\sigma_n}(p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \widehat{\sigma}(p).$$

Enfin, mentionnons un résultat important qui sera utilisé dans le théorème suivant : pour tout $M \geq 0$, l'espace des mesures finies positives sur $\mathbb{T}$ de masse totale M est compact pour la topologie de la convergence faible.

Théorème 1.1. *Soit f un élément de H. Alors il existe une unique mesure positive finie σ_f sur $\mathbb{T}$ telle que l'on ait*

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \langle f\,,\, U^p f\rangle \;=\; \widehat{\sigma_f}(p). \tag{1}$$

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit une mesure positive finie ν_n sur $\mathbb{T}$ par sa densité par rapport à λ (mesure de Lebesgue normalisée) :

$$\frac{d\nu_n}{d\lambda}(t) \;:=\; \frac{1}{n}\left\|\sum_{j=0}^{n-1} e^{i2\pi jt} U^{-j} f\right\|^2 \;=\; \frac{1}{n}\sum_{j,k=0}^{n-1} e^{i2\pi(j-k)t}\left\langle U^{-j} f\,,\, U^{-k} f\right\rangle.$$

Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourrier $\widehat{\nu_n}(p)$ vaut alors

$$\widehat{\nu_n}(p) \;=\; \frac{1}{n} \sum_{\substack{0\leq j,k\leq n-1\\ j-k=p}} \left\langle f\,,\, U^{j-k} f\right\rangle \;=\; \begin{cases} \frac{n-|p|}{n}\,\langle f\,,\, U^p f\rangle & \text{si } |p|<n,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On a ainsi pour tout $p \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{\nu_n}(p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle f\,,\, U^p f\rangle\,.$$

Par ailleurs, remarquons que pour tout n, la masse totale de ν_n vaut $\nu_n(\mathbb{T}) = \widehat{\nu_n}(0) = \|f\|^2$. Par compacité de l'espace des mesures positives sur $\mathbb{T}$ de masse totale fixée, la suite (ν_n) a au moins une valeur d'adhérence. Ce qui précède prouve qu'elle n'en a qu'une, que l'on note σ_f, et qui vérifie (1). $\square$

Définition 1.2. *On appelle* mesure spectrale de f *la mesure σ_f définie par (1).*

Remarquons déjà que la masse totale de σ_f est donnée par

$$\sigma_f(\mathbb{T}) \;=\; \int_{\mathbb{T}} 1\, d\sigma_f \;=\widehat{\sigma_f}(0) \;=\; \langle f\,,\, f\rangle \;=\; \|f\|^2 .$$

Regardons maintenant un exemple important : celui où f est un vecteur propre de U, associé à une valeur propre α. Comme U est un opérateur unitaire, $|\alpha| = 1$, et on peut donc écrire $\alpha = e^{i2\pi\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{T}$. On a ensuite, pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\langle U^p f\,,\, f\rangle \;=\; e^{i2\pi p\theta}\,\langle f\,,\, f\rangle \;=\; \|f\|^2 \int_{\mathbb{T}} e^{i2\pi pt}\, d\delta_\theta(t),$$

où δ_θ est la masse de Dirac en θ. Ainsi, on a dans ce cas $\sigma_f = \|f\|^2\,\delta_\theta$. Inversement, si $\sigma_f = \|f\|^2\,\delta_\theta$, on en déduit que

$$\langle Uf\,,\, f\rangle = e^{i2\pi\theta}\,\|f\|^2 ,$$

en particulier

$$|\langle Uf\,,\, f\rangle| = \|Uf\|\,\|f\| .$$

Or on sait que l'inégalité de Cauchy-Schwartz est une égalité si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires, on en déduit que $Uf = e^{i2\pi\theta} f$.

Le cas où les vecteurs $(U^p f)_{p\in\mathbb{Z}}$ forment un système orthonormal fournit un autre exemple classique. Les coefficients de Fourier de la mesure spectrale σ_f sont alors tous nuls, sauf celui d'indice 0 qui vaut 1. La mesure spectrale de f est dans ce cas la mesure de Lebesgue.

1.2 Correspondance entre l'espace cyclique engendré par f et $L^2(\sigma_f)$

Pour $f \in H$, on note $S(f)$ l'espace cyclique engendré par f, c'est-à-dire le plus petit sous-espace vectoriel fermé de H qui contient tous les $U^p f$, $p \in \mathbb{Z}$. On cherche maintenant à construire une isométrie Φ_f entre $S(f)$ et $L^2(\sigma_f)$, en faisant correspondre, pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$, ϵ_p à $U^p f$ (rappelons que ϵ_p est le caractère $t \mapsto e^{i2\pi pt}$, qui est toujours dans $L^2(\sigma_f)$). Remarquons tout d'abord que, grâce à la définition de σ_f, $g \in S(f)$ défini par $g := \sum_1^n a_j U^{p_j} f$, et l'élément φ de $L^2(\sigma_f)$ défini par $\varphi := \sum_1^n a_j \epsilon_{p_j}$ vérifient $\|g\|_H = \|\varphi\|_{L^2(\sigma_f)}$.

En particulier, si g est nul (ce qui ne veut pas forcément dire que tous les a_j sont nuls), φ est nul aussi. Ceci permet donc de définir sans ambiguïté

$$\Phi_f \left(\sum_1^n a_j U^{p_j} f \right) \ := \ \sum_1^n a_j \epsilon_{p_j}.$$

Φ_f est alors une application linéaire de l'espace vectoriel engendré par les $U^p f$ sur le sous-espace vectoriel de $L^2(\sigma_f)$ engendré par les ϵ_p, qui conserve la norme. Comme, d'un côté, l'espace engendré par les $U^p f$ est (par définition) dense dans $S(f)$, et de l'autre celui engendré par les applications ϵ_p est dense dans $L^2(\sigma_f)$, Φ_f se prolonge en une application bijective isométrique de $S(f)$ sur $L^2(\sigma_f)$. On notera désormais $g \overset{f}{\longleftrightarrow} \varphi$ pour $\varphi = \Phi_f(g)$. On a ainsi $f \overset{f}{\longleftrightarrow} 1$, et pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $U^p f \overset{f}{\longleftrightarrow} \epsilon_p$. En général, on montre facilement que si $g \overset{f}{\longleftrightarrow} \varphi$, alors pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a $U^p g \overset{f}{\longleftrightarrow} \epsilon_p \varphi$. L'action de U^p sur $S(f)$ correspond donc par Φ_f à la multiplication par ϵ_p dans $L^2(\sigma_f)$.

On donne maintenant quelques propriétés concernant les espaces cycliques $S(f)$ et les espaces $L^2(\sigma_f)$ correspondants. Les symboles f, g, h désignent toujours des éléments de H.

Proposition 1.3. *Soit $g \in S(f)$, et soit φ tel que $g \overset{f}{\longleftrightarrow} \varphi$. Alors $\sigma_g \ll \sigma_f$, et*

$$\frac{d\sigma_g}{d\sigma_f} \ = \ |\varphi|^2 .$$

Démonstration. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$\widehat{\sigma_g}(p) \ = \ \langle U^p g \, , \, g \rangle_H \ = \ \langle \varphi \, , \, \epsilon_p \varphi \rangle_{L^2(\sigma_f)} \ = \ \int_{\mathbb{T}} e^{-i2\pi pt} \, |\varphi|^2 \, d\sigma_f.$$

$\square$

Corollaire 1.4. *Si ρ est une mesure positive finie sur $\mathbb{T}$ telle que $\rho \ll \sigma_f$, alors il existe $g \in S(f)$ tel que $\sigma_g = \rho$.*

Démonstration. Prendre $g \in S(f)$ tel que

$$g \overset{f}{\longleftrightarrow} \sqrt{\frac{d\rho}{d\sigma_f}}.$$

$\square$

Lemme 1.5. *Soit $g \in S(f)$, et $\varphi \in L^2(\sigma_f)$ tel que $g \xleftrightarrow{f} \varphi$. Soit $h \in S(g)$, et $\psi \in L^2(\sigma_g)$ tel que $h \xleftrightarrow{g} \psi$. Alors $h \in S(f)$, $\psi\varphi \in L^2(\sigma_f)$, et $h \xleftrightarrow{f} \psi\varphi$.*

Démonstration. Il est évident que $S(g) \subset S(f)$, donc $h \in S(f)$. Par la proposition 1.3, on a immédiatement

$$\int_{\mathbb{T}} |\psi\varphi|^2 \, d\sigma_f \;=\; \int_{\mathbb{T}} |\psi|^2 \, d\sigma_g \;<\; +\infty,$$

d'où $\psi\varphi \in L^2(\sigma_f)$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $\langle U^p h\,,\, h\rangle_H \;=\; \langle \epsilon_p \psi\,,\, \psi\rangle_{\sigma_g}$. D'après la Proposition 1.3, ceci est égal à $\int_{\mathbb{T}} e^{i2\pi pt} |\varphi|^2 |\psi|^2 \, d\sigma_f = \langle \epsilon_p \varphi\psi\,,\, \varphi\psi\rangle_{\sigma_f}$. Donc $h \xleftrightarrow{f} \psi\varphi$. □

Lemme 1.6. *Soit $g \in S(f)$, et $\varphi \in L^2(\sigma_f)$ tel que $g \xleftrightarrow{f} \varphi$. On considère l'ensemble*

$$A \;:=\; \{t \in \mathbb{T} : \; \varphi(t) \neq 0\}\,.$$

(Cet ensemble n'est défini qu'à un ensemble σ_f-négligeable près, mais cela n'a pas d'importance ici.) Alors

$$S(g) \;\xleftrightarrow{f}\; L^2(A, \sigma_f) \;:=\; \left\{\psi \in L^2(\sigma_f) : \; \psi = \mathbb{1}_A \psi \;\sigma_f\text{-p.s.}\right\}.$$

Démonstration. Soit $h \in S(g)$, et soit $\psi \in L^2(\sigma_f)$ tel que $h \xleftrightarrow{f} \psi$. Par la proposition 1.3, on a $\sigma_h \ll \sigma_g$, et comme

$$\sigma_g(\mathbb{T} \setminus A) \;=\; \int_{\mathbb{T}\setminus A} |\varphi|^2 \, d\sigma_f \;=\; 0,$$

on a aussi

$$\sigma_h(\mathbb{T} \setminus A) \;=\; \int_{\mathbb{T}\setminus A} |\psi|^2 \, d\sigma_f \;=\; 0,$$

et donc $\psi \in L^2(A, \sigma_f)$.

Réciproquement, soit $\psi \in L^2(A, \sigma_f)$. Alors la fonction ψ/φ est dans $L^2(\sigma_g)$, car en utilisant à nouveau la proposition 1.3 on obtient

$$\int_{\mathbb{T}} \left|\frac{\psi}{\varphi}\right|^2 d\sigma_g \;=\; \int_{\mathbb{T}} |\psi|^2 \, d\sigma_f \;<\; \infty.$$

Il existe donc $h \in S(g)$ tel que $h \xleftrightarrow{g} \psi/\varphi$. On a alors, d'après le lemme 1.5, $h \xleftrightarrow{f} (\psi/\varphi)\varphi = \psi$.

□

Proposition 1.7. *Soient g et h dans un même espace cyclique $S(f)$. Alors $S(g) = S(h)$ si et seulement si $\sigma_g \sim \sigma_h$.*

Démonstration. Soient φ et ψ définis dans $L^2(\sigma_f)$ par $g \overset{f}{\longleftrightarrow} \varphi$, et $h \overset{f}{\longleftrightarrow} \psi$. Puis, soient $A, B \subset \mathbb{T}$ définis par

$$\begin{aligned} A &:= \{t \in \mathbb{T} : \ \varphi(t) \neq 0\}, \\ B &:= \{t \in \mathbb{T} : \ \psi(t) \neq 0\}. \end{aligned}$$

On a, d'après le lemme 1.6 et la proposition 1.3

$$[S(g) = S(f)] \iff [A = B \ \sigma_f\text{-p.s.}] \iff [\sigma_g \sim \sigma_h].$$

□

Proposition 1.8. *Soient g et h dans un même espace cyclique $S(f)$. Si $S(g) \perp S(h)$, alors σ_g et σ_h sont mutuellement singulières.*

Démonstration. Par le lemme 1.6, on peut trouver deux ensembles mesurables A et B dans $\mathbb{T}$ tels que $S(g) \overset{f}{\longleftrightarrow} L^2(A, \sigma_f)$ et $S(h) \overset{f}{\longleftrightarrow} L^2(B, \sigma_f)$. Supposons $S(g) \perp S(h)$, alors $L^2(A, \sigma_f) \perp L^2(B, \sigma_f)$ et donc $\mathbb{1}_{A\cap B} = 0$ dans $L^2(\sigma_f)$. On peut donc supposer $A \cap B = \emptyset$. Mais σ_g est portée par A, et σ_h par B, d'où $\sigma_g \perp \sigma_h$. □

Si on ne sait pas que g et h sont contenus dans un même espace cyclique, $S(g) \perp S(h)$ n'implique pas que σ_g et σ_h sont mutuellement singulières (on peut même avoir $\sigma_g \sim \sigma_h$). On a néanmoins le résultat suivant.

Proposition 1.9. *Si $S(g) \perp S(h)$, alors $\sigma_{g+h} = \sigma_g + \sigma_h$.*

Démonstration. Pour tout entier p, on a

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma_{g+h}}(p) &= \langle (g+h)\,,\, U^p(g+h)\rangle \\ &= \langle g\,,\, U^p g\rangle + \langle h\,,\, U^p h\rangle \qquad (\text{car } S(g) \perp S(h)) \\ &= \widehat{\sigma_g}(p) + \widehat{\sigma_h}(p). \end{aligned}$$

□

Il n'est pas difficile de généraliser ce résultat à une famille dénombrable sommable d'éléments de H, d'où la proposition suivante.

Proposition 1.10. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille d'éléments de* H *vérifiant*

1. *si* $n \neq m$, *alors* $S(f_n) \perp S(f_m)$,
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|^2 < +\infty$.

Alors, en posant $f := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, *on a*

$$\sigma_f \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_{f_n}.$$

Si l'hypothèse d'orthogonalité des sous-espaces cycliques est levée, on obtient simplement l'absolue continuité.

Proposition 1.11. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille d'éléments de* H *vérifiant*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|^2 < +\infty.$$

Alors, en posant $f := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, *on a*

$$\sigma_f \;\ll\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_{f_n}.$$

Démonstration. On se ramène au cas de la proposition 1.10 par un procédé de type *orthogonalisation de Schmidt* : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $f_n = f'_n + f''_n$, où $f_0 = f''_0$ ($f'_0 = 0$), et pour tout $n > 0$,

— $f'_n \in S(f_0) + \cdots + S(f_{n-1}) = \bigoplus_{0\leq i<n} S(f''_i)$,
— $f''_n \perp \bigoplus_{0\leq i<n} S(f''_i)$.

Alors les $S(f''_n)$ sont deux à deux orthogonaux, et on a pour tout n, $f_n \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S(f''_n)$, d'où aussi $f \in \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S(f''_n)$. Ainsi, f s'écrit $f = \sum_n g''_n$, où $g''_n \in S(f''_n)$. Mais alors, par la proposition 1.10,

$$\sigma_f \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_{g''_n} \;\ll\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_{f''_n} \;\ll\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_{f_n}$$

(car $\sigma_{f_n} = \sigma_{f'_n} + \sigma_{f''_n}$ par application de la proposition 1.9). $\square$

Corollaire 1.12. *Si* D *est une partie dense dans* H, *et* σ *une mesure finie sur* $\mathbb{T}$ *vérifiant* $\sigma_f \ll \sigma$ *pour tout* $f \in D$, *alors* $\sigma_f \ll \sigma$ *pour tout* $f \in H$.

Démonstration. On peut construire une famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormale, où chaque f_n est dans l'espace vectoriel engendré par D (donc vérifie $\sigma_{f_n} \ll \sigma$), et telle que l'espace vectoriel engendré par les f_n soit aussi dense dans H. Mais alors chaque f de H peut s'écrire $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n f_n$ avec $\sum |a_n|^2 < \infty$, d'où

$$\sigma_f \ \ll \ \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \sigma_{f_n} \ \ll \ \sigma.$$

□

Proposition 1.13. *Si σ_g et σ_h sont mutuellement singulières, alors $S(g) \perp S(h)$ et*

$$S(g+h) = S(g) \oplus S(h).$$

Démonstration. Posons $h = h_1 + h_2$, où $h_1 \in S(g)$ et $h_2 \perp S(g)$, d'où $S(h_2) \perp S(g)$ puis $S(h_2) \perp S(h_1)$. En appliquant la proposition 1.9, on obtient $\sigma_h = \sigma_{h_1} + \sigma_{h_2}$. On a en particulier $\sigma_{h_1} \ll \sigma_h$, et donc $\sigma_{h_1} \perp \sigma_g$. Mais, par ailleurs, $h_1 \in S(g)$ et donc d'après la proposition 1.3, $\sigma_{h_1} \ll \sigma_g$. On a donc forcément $\sigma_{h_1} = 0$, c'est-à-dire $h = h_2 \perp S(g)$, ce qui prouve le premier point de la proposition.

Comme il est clair que $S(g+h) \subset S(g) \oplus S(h)$, il suffit pour montrer le deuxième point de prouver que $g \in S(g+h)$. En appliquant à nouveau la proposition 1.9 à g et h, on obtient $\sigma_g + \sigma_h = \sigma_{g+h}$, d'où $\sigma_g \ll \sigma_{g+h}$. Mais puisque $\sigma_g \perp \sigma_h$, on a σ_h-presque partout $\frac{d\sigma_g}{d\sigma_{g+h}} = 0$. Il en découle

$$\int_{\mathbb{T}} \left| \frac{d\sigma_g}{d\sigma_{g+h}} \right|^2 d\sigma_{g+h} = \int_{\mathbb{T}} \frac{d\sigma_g}{d\sigma_{g+h}} d\sigma_g = \int_{\mathbb{T}} \frac{d\sigma_g}{d\sigma_{g+h}} d\sigma_{g+h} = \int_{\mathbb{T}} d\sigma_g.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique $P(\epsilon_1)$ tel que

$$\int_{\mathbb{T}} \left| \frac{d\sigma_g}{d\sigma_{g+h}} - P(\epsilon_1) \right|^2 d\sigma_{g+h} < \varepsilon.$$

Comme $S(g) \perp S(h)$, on sait que $\langle g\, ,\, P(U)(h) \rangle = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
\|g - P(U)(g+h)\|^2 &= \|g\|^2 + \|P(U)(g+h)\|^2 - 2Re\,\langle g\, ,\, P(U)(g) \rangle \\
&= \int_{\mathbb{T}} d\sigma_g + \int_{\mathbb{T}} |P(\epsilon_1)|^2\, d\sigma_{g+h} - 2Re \int_{\mathbb{T}} P(\epsilon_1) \frac{d\sigma_g}{d\sigma_{g+h}} d\sigma_{g+h} \\
&= \int_{\mathbb{T}} d\sigma_g + \int_{\mathbb{T}} \left| P(\epsilon_1) - \frac{d\sigma_g}{d\sigma_{g+h}} \right|^2 d\sigma_{g+h} - \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{d\sigma_g}{d\sigma_{g+h}} \right|^2 d\sigma_{g+h} \\
&= \int_{\mathbb{T}} \left| P(\epsilon_1) - \frac{d\sigma_g}{d\sigma_{g+h}} \right|^2 d\sigma_{g+h} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $\|g - P(U)(g+h)\|^2 < \varepsilon$. Donc $g \in S(g+h)$. □

De même, on peut facilement généraliser ce résultat à une famille dénombrable sommable d'éléments de H, d'où la proposition suivante.

Proposition 1.14. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de H vérifiant*

1. *si $n \neq m$, alors $\sigma_{f_n} \perp \sigma_{f_m}$,*
2. *$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|^2 < +\infty$.*

Alors, en posant $f := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, on a

$$\sigma_f \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_{f_n}, \quad \text{et } S(f) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S(f_n).$$

2 Type spectral maximal

2.1 Type spectral maximal d'un opérateur unitaire

Définition 2.1. *Soit $f \in H$. On dit que f est* de type spectral maximal *si pour tout $g \in H$, $\sigma_g \ll \sigma_f$.*

Il est clair que si f et g sont deux éléments de type spectral maximal, alors $\sigma_f \sim \sigma_g$. On appelle *type spectral maximal de U* la classe d'équivalence de σ_f, pour un f de type spectral maximal.

Proposition 2.2. *Pour tout $g \in H$, il existe toujours au moins un f dans H de type spectral maximal tel que $g \in S(f)$.*

Démonstration. On se donne une famille dénombrable (g_n) dense dans H. En effectuant à partir de cette famille le procédé d'orthogonalisation décrit dans la proposition 1.11, on obtient une famille (f_n) telle que les espaces cycliques $S(f_n)$ soient deux à deux orthogonaux, et telle que $H = \bigoplus S(f_n)$.

On peut ensuite trouver une suite (a_n) de réels tous strictement positifs, avec $\sum a_n^2 = 1$. On pose alors

$$f \;:=\; \sum a_n f_n.$$

Comme les $S(f_n)$ sont deux à deux orthogonaux, la mesure spectrale de f est

$$\sigma_f \;=\; \sum a_n^2 \sigma_{f_n}.$$

Puis, tout $h \in H$ s'écrit $\sum h_n$ avec $h_n \in S(f_n)$, d'où

$$\sigma_h \;=\; \sum \sigma_{h_n} \;\ll\; \sum a_n^2 \sigma_{f_n} \;=\; \sigma_f.$$

Ainsi f est bien de type spectral maximal.

Fixons maintenant $g \in H$. Décomposons σ_f sous la forme $\sigma_f = \sigma_1 + \sigma_2$ avec $\sigma_1 \sim \sigma_g$ et $\sigma_2 \perp \sigma_g$. Comme $\sigma_2 \ll \sigma_f$, il existe $f' \in S(f)$ tel que $\sigma_{f'} = \sigma_2$ (corollaire 1.4). On a alors $\sigma_{f'} \perp \sigma_g$. D'après la proposition 1.13, $\sigma_{f'+g} = \sigma_{f'} + \sigma_g$ et $g \in S(f'+g)$. Mais $f'+g$ est de type spectral maximal car $\sigma_{f'+g} = \sigma_2 + \sigma_g \sim \sigma_f$. □

2.2 Type spectral maximal d'un système mesuré

On se place à nouveau dans le cadre de l'étude d'un système mesuré (X, μ, T). Comme on sait que toutes les fonctions constantes sont invariantes par U_T, l'étude spectrale de U_T n'a d'intérêt que sur l'orthogonal du sous-espace des fonctions constantes, c'est-à-dire sur

$$L_0^2(\mu) \;:=\; \left\{ f \in L^2(\mu) : \int_X f \, d\mu = 0 \right\}.$$

On définit alors le type spectral maximal de T comme étant *le type spectral maximal de la restriction de U_T à $L_0^2(\mu)$.*

La connaissance du type spectral maximal de T permet de déterminer quelques-unes des propriétés du système ; la proposition qui suit, par exemple, montre que l'ergodicité se voit sur le type spectral maximal de T. Mais on verra aussi que d'autres propriétés comme le mélange par exemple se caractérisent en termes de type spectral maximal.

Exercice 2.1. *Prouver que le système dynamique $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ est ergodique si et seulement si le type spectral maximal de T ne charge pas $\{0\}$.*

Définition 2.3. *On dit que T a* spectre simple *s'il existe $f \in L_0^2(\mu)$ tel que $S(f) = L_0^2(\mu)$.*

Définition 2.4. *On dit que T a* spectre discret *si le type spectral maximal de T est purement atomique.*

Exercice 2.2. *Prouver que T a spectre discret si et seulement si chaque $f \in L^2\big(\big(X, \mathscr{B}(X), \mu\big)\big)$ peut être arbitrairement bien approché par une combinaison linéaire finie de vecteurs propres pour U_T.*

Voyons un exemple dans lequel il est facile de déterminer le type spectral maximal de T.

Type spectral maximal d'une rotation

Ici, X est le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la mesure de Lebesgue λ, et la transformation est $T = R_\alpha : x \longmapsto x+\alpha \pmod 1$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Les fonctions $\epsilon_p : x \longmapsto \exp(i2\pi px)$, $p \in \mathbb{Z}^*$ forment alors une famille orthonormale engendrant un sous-espace dense dans L^2_0. Or, la mesure spectrale de chaque ϵ_p est facile à déterminer : ϵ_p est une fonction propre de U_T associée à la valeur propre $\exp(i2\pi p\alpha)$. On a donc

$$\sigma_{\epsilon_p} = \delta_{p\alpha}.$$

De plus, $S(\epsilon_p)$ est la droite vectorielle engendrée par ϵ_p. Il en découle que si $p \neq q$, $S(\epsilon_p) \perp S(\epsilon_q)$. Le corollaire 1.12 permet d'en déduire que tout $f \in L^2_0$ a une mesure spectrale absolument continue par rapport à $\sum_{p\in\mathbb{Z}^*} \delta_{p\alpha}$. Par ailleurs, la proposition 1.10 assure que si l'on pose

$$f := \sum_{p\in\mathbb{Z}^*} 2^{-|p|}\epsilon_p,$$

alors

$$\sigma_f = \sum_{p\in\mathbb{Z}^*} 2^{-2|p|}\delta_{p\alpha},$$

ce qui prouve que $\sum_{p\in\mathbb{Z}^*} \delta_{p\alpha}$ est le type spectral maximal de la rotation. Ainsi on obtient le résultat suivant.

Proposition 2.5. *La rotation R_α est toujours à spectre discret.*

Le résultat de l'exercice 2.1 permet aussi de retrouver la condition d'ergodicité d'une rotation que l'on connaissait déjà : d'après cette proposition, la rotation est ergodique si et seulement si 0 ne peut pas s'écrire sous la forme $p\alpha \mod 1$ avec un entier $p \neq 0$ c'est-à-dire si et seulement si $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Proposition 2.6. *Si α est irrationnel, R_α est à spectre simple.*

Démonstration. Soit α l'angle de la rotation. Puisque α est irrationnel, les mesures spectrales $\sigma_{\epsilon_p} = \delta_{p\alpha}$, $p \in \mathbb{Z}^*$, sont deux-à-deux mutuellement singulières. Considérons comme précédemment la fonction

$$f := \sum_{p\in\mathbb{Z}^*} 2^{-|p|}\epsilon_p,$$

alors la proposition 1.14 prouve que

$$S(f) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}^*} S(\epsilon_p) = L^2_0(\mathbb{T}, \lambda).$$

□

Densité du type spectral maximal

Une classe de questions naturelles et importantes consiste à se demander quelles mesures sur le tore peuvent apparaître comme type spectral maximal d'un système mesuré vérifiant certaines conditions données.

Une application de lemme de Rokhlin permet de montrer que pour la classe des systèmes apériodiques, il existe une première restriction importante pour le type spectral maximal.

Proposition 2.7. *Si le système (X, μ, T) est apériodique, alors le type spectral maximal de T charge tous les ouverts de $\mathbb{T}$.*

Idée de la démonstration. On se donne un intervalle ouvert non vide $]a, b[\subset \mathbb{T}$. On veut trouver $f \in L^2\big(X, \mathscr{B}(X), \mu\big)$ tel que $\sigma_f(]a, b[) > 0$. Pour cela, on se donne un $\alpha \in]a, b[$, et on remarque que si $e^{i2\pi\alpha}$ était valeur propre de U_T, alors un vecteur propre associé à cette valeur propre ferait l'affaire (puisque sa mesure spectrale serait δ_α). Il est possible en général que U_T n'ait pas d'autre valeur propre que 1, mais on peut néanmoins construire f qui est *presque* un vecteur propre associé à la valeur propre recherchée. Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut construire $f \in L^2\big(X, \mathscr{B}(X), \mu\big)$ tel que $f \circ T = e^{i2\pi\alpha} f$ sur un ensemble de mesure au moins $1 - \varepsilon$. En effet, le lemme de Rokhlin assure qu'il existe une tour de Rokhlin $(B, TB, \dots, T^{h-1}B)$ telle que $(h-1)\mu(B) > \varepsilon$ et il suffit alors de considérer la fonction f définie par

$$f := \sum_{j=0}^{h-1} e^{i2\pi j\alpha} \mathbb{1}_{T^j B}.$$

La fin de la démonstration, laissée en exercice, consiste à montrer que si ε est choisi assez petit, alors σ_f est assez proche de δ_α pour que cela entraîne $\sigma_f(]a, b[) > 0$. □