

# Lemme de Rokhlin, temps de retour et quelques applications

T. de la Rue

Master 2 MFA Rouen 2015-2016

Dans tout ce chapitre,  $T$  est un automorphisme de l'espace de Lebesgue  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , c'est-à-dire une transformation de  $X$  inversible, bi-mesurable, et préservant la mesure de probabilité  $\mu$ . Le fait que  $T$  soit inversible permet notamment de considérer les parties  $T(A), T^2(A), \dots$  qui sont automatiquement mesurables dès que  $A$  l'est, et de même mesure que  $A$ . Le lecteur est invité à énoncer et démontrer des résultats analogues à ceux présentés dans la suite dans le cas où  $T$  est simplement un *endomorphisme* (une transformation préservant la mesure  $\mu$ , mais non nécessairement inversible) de  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ .

L'objectif est ici d'introduire des outils fondamentaux en théorie ergodique :

- d'une part la notion de *temps de retour* dans une partie de  $X$  et les deux théorèmes basiques qui s'y rapportent (théorème de récurrence de Poincaré et formule de Kac), avec comme application le concept de *transformation induite*,
- d'autre part le *lemme de Rokhlin*, qui assure l'existence dans un système dynamique quelconque d'une structure appelée *tour de Rokhlin*, essentielle dans la preuve de nombreux résultats de théorie ergodique, dont par exemple la construction d'un générateur dénombrable exposée ici.

Ces trois théorèmes (théorème de récurrence de Poincaré, formule de Kac et lemme de Rokhlin) sont regroupés ensemble car ils peuvent être démontrés presque simultanément à l'aide d'une même figure présentée au paragraphe suivant.

## 1 Le temps de retour

### 1.1 Le schéma du temps de retour : une figure pour tout démontrer

Prenons une partie  $A$  de mesure strictement positive dans  $X$ . Pour tout  $x \in A$ , on définit le *temps de retour de  $x$  en  $A$*  par

$$r_A(x) := \min \left\{ k \geq 1 : T^k x \in A \right\},$$

avec bien sûr la convention  $\min \emptyset = \infty$ .

On partitionne alors  $A$  suivant les valeurs possibles de ce temps de retour, en posant

$$A_k := \{x \in A : r_A(x) = k\} \quad (k = 1, 2, \dots, \infty).$$

Sur la figure 1, on a représenté  $A$  comme la réunion disjointe des  $A_k$ , et les images successives des parties  $A_k$  avant leur retour dans  $A$ . Au-dessus de  $A_1$ , rien n'apparaît car tous les points de  $A_1$  retournent dans  $A$  dès la première itération de  $T$ . Au-dessus de  $A_2$ , on a dessiné  $TA_2$  qui a même mesure que  $A_2$  et qui est disjoint de  $A$ . L'ensemble  $T^2A_2$  n'est pas représenté

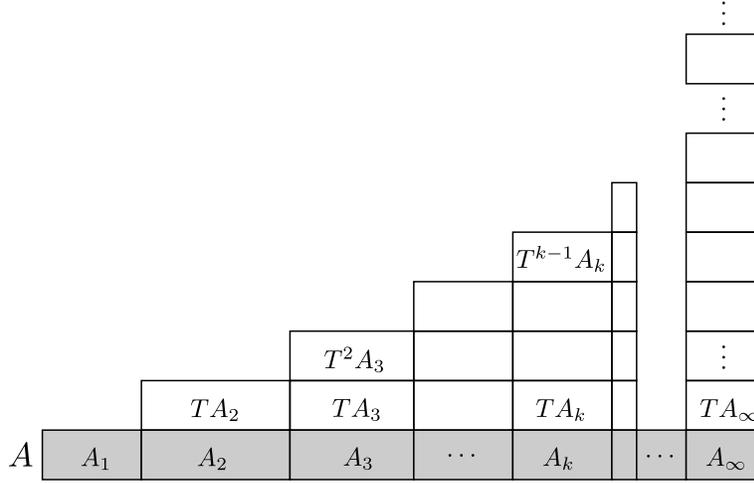


FIGURE 1 – Le schéma du temps de retour

car il est contenu dans  $A$ . En général, pour tout entier  $k$ , les images  $TA_k, T^2 A_k, \dots, T^{k-1} A_k$  sont disjointes de  $A$ , donc deux à deux disjointes, et ne rencontrent pas non plus les ensembles  $TA_j, T^2 A_j, \dots, T^{j-1} A_j$  pour  $j \neq k$  par l'injectivité de  $T$ . On représente ainsi  $A_k, TA_k, T^2 A_k, \dots, T^{k-1} A_k$  les uns au-dessus des autres, sous forme d'une tour. Enfin, au-dessus de  $A_\infty$  se trouve une tour de hauteur infinie constituée des parties deux à deux disjointes  $TA_\infty, T^2 A_\infty, \dots$

## 1.2 Le théorème de récurrence de Poincaré

**Théorème 1.1** (Poincaré). *Soit  $A \in \mathcal{A}$  avec  $\mu(A) > 0$ . Alors pour  $\mu$ -presque tout  $x \in A$ ,  $r_A(x) < \infty$ .*

*Démonstration.* On vient de voir que les images  $TA_\infty, T^2 A_\infty, \dots$  constituent une famille infinie de parties deux à deux disjointes ; or chacune de ces parties a même mesure que  $A_\infty$ . Comme la mesure de  $X$  est finie, cela n'est possible que si  $\mu(A_\infty) = 0$ .  $\square$

**Corollaire 1.2.** *Si  $\mu(A) > 0$ , pour presque tout point de  $A$  il existe une infinité d'entiers  $k_1 < k_2 < \dots$  tels que pour tout  $j \geq 1$ ,  $T^{k_j} x \in A$ .*

## 1.3 Valeur moyenne du temps de retour : formule de Kac

Le théorème de récurrence de Poincaré affirme que, dès que  $\mu(A) > 0$ , presque tout point de  $A$  revient au moins une fois dans  $A$ . Il est intuitivement clair que plus la mesure de l'ensemble  $A$  est petite, plus il faudra attendre longtemps avant de revenir dans  $A$ . Le théorème qui suit précise, dans le cas ergodique, comment varie la moyenne du temps de retour en fonction de  $\mu(A)$ .

**Théorème 1.3** (Formule de Kac). *Supposons  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  ergodique. Alors pour tout  $A \in \mathcal{A}$  avec  $\mu(A) > 0$ , la moyenne du temps de retour en  $A$  vaut*

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A r_A(x) d\mu = \frac{1}{\mu(A)}.$$

*Démonstration.* Puisque  $T$  est ergodique et  $\mu(A) \neq 0$ , on a

$$\mu \left( \bigcup_{n \geq 0} T^n A \right) = 1.$$

Or,  $\bigcup_{n \geq 0} T^n A$  est constitué de la réunion des  $T^j A_k$  représentés sur la figure 1, d'où

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{k-1} \mu(T^j A_k) = 1,$$

ce qui s'écrit

$$1 = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mu(A_k) = \int_A r_A(x) d\mu(x).$$

□

## 2 Tours de Rokhlin

Dans un système dynamique donné  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ , on appelle *tour de Rokhlin* une famille finie de parties mesurables de la forme

$$\mathcal{T} = (B, TB, \dots, T^{h-1}B),$$

où les  $T^j B$ ,  $0 \leq j \leq h-1$ , sont deux à deux disjoints. L'ensemble  $B$  est la *base* de la tour  $\mathcal{T}$ , chaque  $T^j B$  est appelé un *étage* de  $\mathcal{T}$ , et l'entier  $h$  est la *hauteur* de  $\mathcal{T}$ . La tour désigne aussi (abusivement) la réunion des étages, et la *mesure* de la tour est donc  $\mu(\mathcal{T}) = h\mu(B)$ . Il est courant de représenter graphiquement une tour de Rokhlin en plaçant ses étages les uns au-dessus des autres ; l'action de  $T$  consiste alors, au niveau de la tour, à monter d'un étage. *Exemple* – Dans le schéma du temps de retour présenté précédemment, pour tout  $k \geq 1$  la famille  $(A_k, TA_k, \dots, T^{k-1}A_k)$  est une tour de Rokhlin de hauteur  $k$ .

### 2.1 Le lemme de Rokhlin dans le cas ergodique

**Théorème 2.1** (Lemme de Rokhlin, cas ergodique). *Supposons le système  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  ergodique, et  $\mu$  non atomique. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout entier  $h \geq 1$ , il existe une tour de Rokhlin de hauteur  $h$  et de mesure au moins  $1 - \varepsilon$ .*

*Démonstration.* Puisque  $T$  est ergodique, dans le schéma du temps de retour construit à partir d'une partie  $A$  de mesure  $\mu(A) > 0$ , on a représenté l'espace  $X$  tout entier (à un négligeable près) sous forme de la réunion disjointe des tours de Rokhlin

$$\mathcal{T}_k := (A_k, TA_k, \dots, T^{k-1}A_k) \quad (k \geq 1).$$

Dans chaque tour  $\mathcal{T}_k$ , on peut ensuite construire  $q_k$  tours de hauteur  $h$ , où  $q_k$  est le quotient de la division euclidienne de  $k$  par  $h$ . Soit  $B$  la réunion de toutes les bases de ces tours de hauteur  $h$  ainsi obtenues : alors  $\mathcal{T} := (B, TB, \dots, T^{h-1}B)$  est encore une tour de Rokhlin de

hauteur  $h$ . De plus, au-dessus de chacun de  $A_k$  il y a au plus  $h - 1$  étages de  $\mathcal{T}_k$  qui ne se retrouvent pas dans  $\mathcal{T}$ . On en déduit

$$\mu(X \setminus \mathcal{T}) \leq (h - 1)\mu(A).$$

Pour que  $\mathcal{T}$  soit la tour annoncée, il suffit donc d'avoir au départ choisi un  $A$  tel que  $0 < \mu(A) < \varepsilon/(h - 1)$ , ce qui est toujours possible si  $\mu$  est non atomique.  $\square$

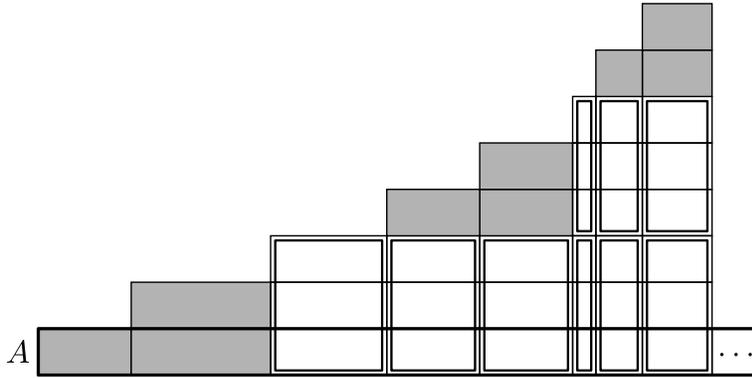


FIGURE 2 – Construction d'une tour de Rokhlin de hauteur  $h = 3$  à partir du schéma du temps de retour

## 2.2 Le cas non ergodique : le lemme de Zorn mesurable

Dans le cas où  $T$  n'est pas ergodique mais que le nombre de composantes ergodiques est fini, on peut construire comme dans la section précédente une tour dans chaque partie, et considérer la réunion des tours. Dans le cas général, le même théorème reste valable à condition de supposer l'apériodicité du système.

**Définition 2.2.** Le système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  est dit apériodique si pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\mu(\{x \in X : T^n x = x\}) = 0.$$

**Exercice 2.1.** Prouver que si  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  est apériodique, alors  $\mu$  est non atomique.

**Théorème 2.3** (Lemme de Rokhlin). Supposons le système  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  apériodique. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout entier  $h \geq 1$ , il existe dans le système une tour de Rokhlin de hauteur  $h$  et de mesure au moins  $1 - \varepsilon$ .

La démonstration repose sur la même idée que dans le cas ergodique ; pour reproduire la même construction, il suffit de montrer qu'il existe un ensemble mesurable  $A$  de mesure arbitrairement petite, tel que  $\bigcup_{n \geq 0} T^n A = X$  à un négligeable près. Pour obtenir un tel  $A$  sans l'ergodicité, on a recours au lemme suivant (voir [3]).

**Lemme 2.4** (Lemme de Zorn mesurable). Soit  $\mathcal{C}$  une collection non vide de parties mesurables de  $X$  ordonnée par l'inclusion. Supposons que toute famille  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dénombrable et croissante dans  $\mathcal{C}$  admette une borne supérieure dans  $\mathcal{C}$ . Alors  $\mathcal{C}$  admet un élément  $M$  maximal (au sens où : si  $M_1 \in \mathcal{C}$  vérifie  $M \subset M_1$ , alors  $\mu(M_1 \setminus M) = 0$ ).

*Démonstration.* Soit  $A_0 \in \mathcal{C}$  et soit  $s_0 := \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{C}, A_0 \subset A\}$ . Si  $s_0 = \mu(A_0)$ , alors  $A_0$  est un élément maximal. Sinon, il existe  $A_1 \in \mathcal{C}$ , contenant  $A_0$ , et tel que  $\mu(A_1) > \mu(A_0) + \frac{s_0 - \mu(A_1)}{2}$ . On considère alors  $s_1 := \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{C}, A_1 \subset A\}$ . On construit ainsi par récurrence une famille croissante  $(A_i)_i$  d'éléments de  $\mathcal{C}$ , qui admet donc par hypothèse une borne supérieure  $A \in \mathcal{C}$ . Alors  $A$  est un élément maximal.  $\square$

*Preuve du lemme de Rokhlin dans le cas général.* Fixons un entier  $m \geq 1$ . On considère

$$\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{A} : A, TA, \dots, T^{m-1}A \text{ sont deux à deux disjoints}\}.$$

Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$  avec  $A_k \subset A_{k+1}$ , alors  $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  est la borne supérieure de  $(A_n)$  dans  $\mathcal{C}$ . Ainsi, on sait que  $\mathcal{C}$  admet au moins un élément maximal  $A$ . Montrons qu'un tel  $A$  vérifie automatiquement

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^n A\right) = 1.$$

On peut toujours supposer que  $X = [0, 1]$  et  $\mu$  est la mesure de Lebesgue. Par l'hypothèse d'apériodicité, on sait qu'avec probabilité 1 les points  $x, Tx, \dots, T^{m-1}x$  sont deux à deux distincts. En supposant par l'absurde que  $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^n A) < 1$ , on en déduit que  $\mu(D) > 0$ , où  $D$  est l'ensemble des  $x \in X$  tels que  $x, Tx, \dots, T^{m-1}x$  sont deux à deux distincts et jamais dans  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^n A$ . Puis, il existe  $\delta > 0$  tel que  $\mu(D_\delta) > 0$  où  $D_\delta$  est l'ensemble des  $x \in D$  tels que  $x, Tx, \dots, T^{m-1}x$  sont à une distance au moins  $\delta$  l'un de l'autre. Enfin, il existe un intervalle  $I$  de longueur  $\mu(I) < \delta$  tel que

$$\mu(D_\delta \cap I) > 0.$$

Mais alors les ensembles

$$D_\delta \cap I, T(D_\delta \cap I), \dots, T^{m-1}(D_\delta \cap I)$$

sont deux à deux disjoints, et disjoints de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^n A$ , ce qui contredit la maximalité de  $A$ .

Comme l'entier  $m$  peut être choisi arbitrairement grand,  $\mu(A)$  peut être aussi petit que l'on veut (car les ensembles  $(T^i A)_{0 \leq i < m}$  étant deux à deux disjoints,  $\mu(A) \leq 1/m$ ). On peut donc effectuer la même construction que dans le cas ergodique.  $\square$

### 3 Quelques applications du temps de retour

#### 3.1 Ce que dit le théorème de récurrence... et ce qu'il ne dit pas !

Malgré la simplicité de sa démonstration, le théorème de récurrence de Poincaré est un résultat extrêmement puissant aux conséquences parfois surprenantes, comme le montre l'exemple qui suit.

#### Modélisation d'un gaz dans un récipient fermé

On considère un récipient fermé, disons un parallélépipède rectangle, contenant  $N$  molécules de gaz. À un instant donné, l'état du système est donné par les  $3N$  coordonnées des positions des molécules et les  $3N$  coordonnées de leurs vitesses respectives. L'évolution dans le temps de l'état du système suit les lois de la mécanique classique (chocs élastiques des molécules entre elles et sur les parois du récipient). On peut définir une transformation  $T$  de l'ensemble  $X$  des états possibles, qui à l'état  $x$  du système à l'instant  $t$  fait correspondre l'état  $Tx$  du système

à l'instant  $t + 1$  s. On montre que cette transformation préserve la mesure de Lebesgue sur  $X$  qui est une partie bornée de  $\mathbb{R}^{6n}$  (application du théorème de Liouville).

Supposons maintenant que le récipient soit séparé en deux par une cloison étanche, les  $N$  molécules de gaz se trouvant dans une même moitié, l'autre étant vide. À l'instant  $t = 0$ , on retire cette cloison. Le gaz se détend alors et remplit le récipient entier. Mais le théorème de récurrence de Poincaré affirme que, puisqu'à l'instant 0 toutes les molécules sont dans une certaine moitié du récipient, avec probabilité 1 il existera un autre instant  $k > 0$  où l'on retrouvera toutes les molécules dans cette même moitié. . .

De manière plus imagée : si à l'instant 0 on retire la valve d'un pneu gonflé, bien sûr le pneu se dégonfle, mais si l'on attend assez longtemps, avec probabilité 1 on verra le pneu se regonfler tout seul !

Formulé ainsi, le théorème de récurrence de Poincaré peut sembler pour le moins choquant. Mais la formule de Kac donne une explication à ce paradoxe : l'ensemble des états du système où toutes les molécules sont regroupées dans une moitié donnée du récipient étant de probabilité  $2^{-N}$ , le temps moyen qu'il faut attendre pour se retrouver dans un tel état est  $2^N$  s (passons sur la question de l'ergodicité. . .). Si  $N$  est de l'ordre du nombre d'Avogadro, il est clairement impensable d'espérer observer un jour le phénomène du temps de retour !

### Le faux retour de Poincaré

Un article publié dans *Pour la science* (février 87) illustre le théorème de récurrence de Poincaré par une étrange série d'images. La première est un portrait de Henri Poincaré, et les suivantes sont obtenues en itérant sur ce portrait une certaine transformation qui préserve la mesure de Lebesgue. Le portrait disparaît peu à peu, puis revient de manière miraculeuse à la 241<sup>e</sup> itération !

Or, ce retour n'est certainement pas ce que prédit le théorème de récurrence de Poincaré. En effet, selon celui-ci (presque) chaque point de l'image initiale revient arbitrairement près de sa position de départ, mais rien ne dit qu'il existe un temps de retour commun à l'ensemble des points de l'image. . . En fait, on peut montrer que la transformation itérée est mélangeante (elle est construite à partir de ce que l'on appelle un *automorphisme hyperbolique du tore*). À cause de cette propriété de mélange, il est théoriquement impossible d'observer un tel retour de l'image ! On peut objecter à ce raisonnement que la dynamique régissant l'évolution des images présentées n'est pas réellement un automorphisme hyperbolique du tore mais seulement une simulation numérique de celui-ci : il n'y a pas un continuum de points dans l'image mais seulement un ensemble fini de pixels. Et si l'on s'intéresse à un nombre fini de points du tore, alors il est vrai que le théorème de retour de Poincaré prédit l'existence d'un retour simultané de tous ces points dans un voisinage de leur position initiale. (Appliquer le théorème à la transformation produit  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (Tx_1, \dots, Tx_n)$ .) Cependant, l'ordre de grandeur du temps de premier retour donné par le théorème de Kac est sans commune mesure avec le nombre 241 trouvé !

Alors, pourquoi observe-t-on le *retour de Poincaré* aussi précocément dans cette simulation ? Nous renvoyons le lecteur à l'excellente analyse de Ghys sur ce phénomène ([1], disponible sur internet).

### 3.2 Transformation induite

$T$  étant un automorphisme de  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , et  $A$  une partie de  $X$  de mesure  $\mu(A) > 0$ , le théorème de récurrence de Poincaré affirme que pour presque tout  $x$  de  $A$ , le temps de retour  $r_A(x)$  est fini. Ceci permet de définir sur presque tout  $A$  l'application

$$T_A : x \mapsto T^{r_A(x)}x$$

qui est donc une transformation de  $A$ .

Cette transformation est appelée *transformation induite par  $T$  sur  $A$* .

**Théorème 3.1.** *La transformation  $T_A$  préserve la mesure de probabilité  $\mu_A$  définie pour tout  $B$  mesurable contenu dans  $A$  par*

$$\mu_A(B) := \mu(B)/\mu(A),$$

et  $T_A$  est un automorphisme de l'espace de Lebesgue  $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A)$  (où  $\mathcal{A}_A$  est la tribu formée des  $B \in \mathcal{A}$  contenus dans  $A$ ).

De plus, on a l'équivalence

$$T \text{ ergodique} \iff T_A \text{ ergodique et } \mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n A \right) = 1.$$

*Démonstration.* Soit  $B$  mesurable contenu dans  $A$ . Alors  $B = \bigsqcup_{k \geq 1} B_k$  où  $B_k := B \cap \{r_A = k\}$ . On a  $T_A B = \bigsqcup_{k \geq 1} T_A B_k = \bigsqcup_{k \geq 1} T^k B_k$ . Or les ensembles  $(T^k B_k)_k$  sont deux à deux disjoints (par inversibilité de  $T$ ). On obtient donc, puisque  $T$  préserve  $\mu$ ,  $\mu(T_A B) = \sum_k \mu(B_k) = \mu(B)$ . Ainsi  $T_A$  préserve  $\mu_A$ .

La preuve de la deuxième partie du théorème est laissée en exercice... □

Inversement, partant d'un automorphisme  $\tilde{T}$  de  $(A, \mathcal{A}_A, \mu_A)$ , on peut construire un ensemble  $X$  et une transformation  $T$  telle que  $\tilde{T}$  est la transformation induite par  $T$  sur  $A$  ( $T_A = \tilde{T}$ ). Pour cela, on se donne une fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{N}^*$  qui jouera le rôle du temps de retour en  $A$ . Posons  $X := \{(x, n) : x \in A, 0 \leq n < f(x)\}$  et définissons la transformation  $T$  sur  $X$  par

$$T : (x, n) \in X \mapsto \begin{cases} (x, n+1) & \text{si } n < f(x) - 1 \\ (\tilde{T}x, 0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partitionnons  $X$  en ensembles  $X_n$ ,  $n \geq 0$ , selon la valeur de la seconde coordonnée d'un point dans  $X$ . Ainsi  $X_0 = A \times \{0\}$ , et plus généralement,  $X_n = \{x \in A : f(x) > n\} \times \{n\}$ . Sur  $X$ , on peut définir une mesure  $\mu$  préservée par  $T$ , en posant pour  $B \subset X_n$ ,  $\mu(B) := \mu_A(T^{-n}B)$ . On a alors

$$\begin{aligned} \mu(X) &= \sum_{n \geq 0} \mu(X_n) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mu_A(f > n) \\ &= \int_A f d\mu_A. \end{aligned}$$

Si la fonction  $f$  choisie au départ est intégrable, la mesure totale de  $X$  est donc finie et on peut renormaliser  $\mu$  pour en faire une mesure de probabilité  $T$ -invariante. Et il est clair par définition de  $T$  que la transformation induite par  $T$  sur  $A$  est précisément  $\tilde{T}$ . La transformation  $T$  est appelée *automorphisme spécial* associé à  $\tilde{T}$  et  $f$ .

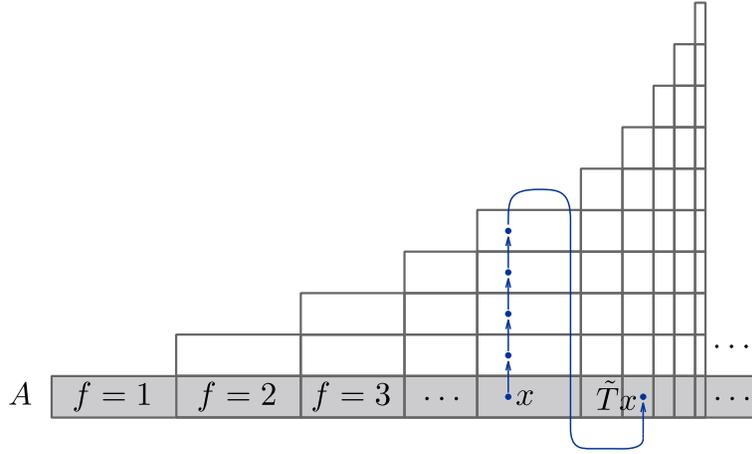


FIGURE 3 – Construction de l’automorphisme spécial au-dessus de  $A$ .

### Exemple : rotations et échanges d’intervalles

Un *échange de 3 intervalles* est une transformation  $T$  définie sur l’intervalle  $[0, 1)$  de la façon suivante : On se donne deux réels  $0 \leq s \leq t \leq 1$ , qui définissent une partition de  $[0, 1)$  en trois sous-intervalles (dont un ou deux peuvent éventuellement être vides, dans des cas dégénérés) :  $I_1 := [0, s)$ ,  $I_2 := [s, t)$ , et  $I_3 := [t, 1)$ . On considère une seconde partition de  $[0, 1)$  en trois sous-intervalles de mêmes longueurs mais dont l’ordre est inversé :  $J_1 := [0, 1-t)$ ,  $J_2 := [1-t, 1-s)$ , et  $J_3 := [1-s, 1)$ . La transformation  $T$  envoie de manière affine et croissante  $I_1$  sur  $J_3$ ,  $I_2$  sur  $J_2$ , et  $I_3$  sur  $J_1$ . Cette transformation est inversible, et préserve clairement la mesure de Lebesgue sur  $[0, 1)$ .

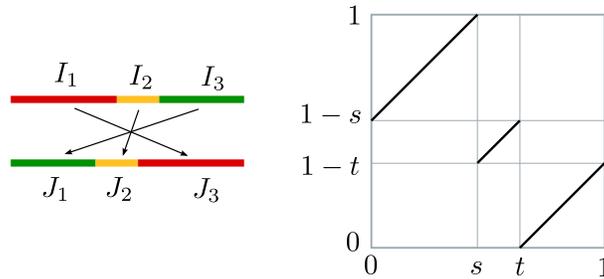


FIGURE 4 – Un échange de 3 intervalles. À droite : le graphe de la transformation

On peut définir de manière analogue un échange de  $n$  intervalles pour tout entier  $n \geq 2$ , en choisissant les bornes des  $n$  sous-intervalles et la permutation de  $\{1, \dots, n\}$  définissant l’ordre dans lequel la transformation déplace les sous-intervalles.

**Proposition 3.2.** *Si  $R$  est une rotation du cercle unité  $S^1$ , et si  $A \subset S^1$  est un arc de cercle de longueur strictement positive, alors la transformation induite  $T_A$  est isomorphe à un échange de trois intervalles.*

*Démonstration.* Soit  $A = [a, b] \subset S^1$  et  $T$  la rotation d’angle  $\alpha$ . Notons  $\lambda$  la mesure de Lebesgue normalisée sur  $S^1$ . Considérons le plus petit entier  $k$  tel que  $\lambda(T^k A \cap A) > 0$ . Alors une des extrémités de  $A$  appartient à  $T^k A$ . Supposons par exemple qu’il s’agit de  $b$ , et posons

$c := T^{-k}b \in A$  (sinon on raisonne par symétrie). On sait déjà que  $T_A = T^k$  sur  $[a, c]$  et l'intervalle  $[a, c]$  est envoyé par  $T_A$  sur  $[T^k a, b]$ .

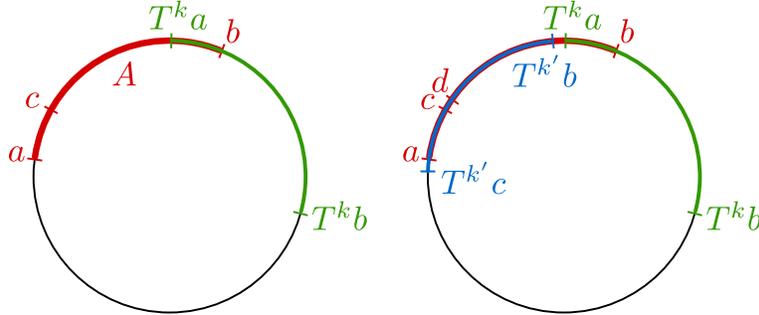


FIGURE 5 – Rotations et échanges d'intervalles

Soit maintenant  $k'$  le plus petit entier (nécessairement supérieur à  $k$ ) tel que  $\lambda(T^{k'}([c, b]) \cap A) > 0$ . Alors  $\lambda(T^{k'}([c, b]) \cap [T^k a, b]) = 0$  par injectivité de  $T_A$  (Théorème 3.1), car sinon des points de  $[T^k a, b]$  auraient plusieurs antécédents par  $T_A$ . On en déduit que, comme sur la figure 5, l'intervalle  $T^{k'}([c, b])$  contient  $a$ . En posant  $d := T^{-k'}a \in [c, b]$ , on obtient  $T_A = T^{k'}$  sur  $[d, b]$ , et l'intervalle  $[d, b]$  est envoyé par  $T_A$  sur  $[a, T^{k'} b]$ .

Il nous reste à définir  $T_A$  sur  $[c, d]$ . Pour cela, on considère le plus petit entier  $k''$  (nécessairement supérieur à  $k'$ ) tel que  $\lambda(T^{k''}([c, d]) \cap A) > 0$ . Par un argument similaire (en utilisant à nouveau l'injectivité de  $T_A$ ), on montre que

$$\lambda(T^{k''}([c, d]) \cap [T^k a, b]) = \lambda(T^{k''}([c, d]) \cap [a, T^{k'} b]) = 0.$$

En remarquant que  $[c, d]$  et  $[T^{k'} b, T^k a]$  ont la même mesure, on en déduit que  $T^{k''}([c, d])$  tombe juste dans l'intervalle laissé libre entre  $T^{k'} b$  et  $T^k a$ .  $\square$

**Exercice 3.1.** Donner une condition sur l'angle  $\alpha$  de la rotation et la longueur de l'arc de cercle  $A \subset S^1$  pour que la transformation induite  $T_A$  soit en fait isomorphe à un échange de deux intervalles.

**Exercice 3.2.** Avec les notations utilisées ci-dessus, montrez que l'échange de trois intervalles est ergodique ssi  $\frac{1-s}{t} \notin \mathbb{Q}$ .

### 3.3 Équivalence des transformations au sens de Kakutani

En 1943, Kakutani [2] introduisit une relation d'équivalence entre systèmes dynamiques ergodiques, construite à partir de l'induction des transformations.

**Définition 3.3.** Soient  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  et  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  deux systèmes dynamiques ergodiques. Ils sont dits équivalents au sens de Kakutani s'il existe  $A \in \mathcal{A}$  et  $B \in \mathcal{B}$ , chacun de mesure strictement positive, tels que  $T_A$  et  $S_B$  soient isomorphes. On notera alors  $T \sim_K S$ .

La relation ainsi définie est clairement réflexive et symétrique, mais la transitivité n'apparaît pas comme évidente. Elle est obtenue comme conséquence des lemmes suivants, dont le détail des preuves est laissé en exercice.

**Lemme 3.4.** Si  $A_2 \subset A_1 \subset X$  et  $\mu(A_2) > 0$ , alors

$$T_{A_2} = (T_{A_1})_{A_2}.$$

**Lemme 3.5.** Si  $A \subset X$  avec  $\mu(A) > 0$ , pour tout entier  $k$ ,  $T_A$  et  $T_{T^k A}$  sont isomorphes.

**Lemme 3.6.** Si  $A_1$  et  $A_2$  sont deux parties mesurables de  $X$ , chacune de mesure strictement positive, alors  $T_{A_1} \sim_K T_{A_2}$ .

*Indication* — Par ergodicité, il existe un entier  $k$  tel que  $A_3 := A_1 \cap T^k A_2$  soit de mesure strictement positive. Mais alors  $T_{A_1}$  et  $T_{T^k A_2}$  ont un induit commun qui est  $T_{A_3} \dots$

Voilà comment obtenir la transitivité de  $\sim_K$  : supposons  $S \sim_K T$  et  $T \sim_K R$ . Alors  $T$  possède un induit  $T_{A_1}$  isomorphe à un induit de  $S$ , et un induit  $T_{A_2}$  isomorphe à un induit de  $R$ . Par le lemme 3.6,  $T_{A_1}$  et  $T_{A_2}$  ont un induit isomorphe, et celui-ci est isomorphe à la fois à un induit de  $S$  et à un induit de  $R$ .

## 4 Exemples d'utilisation du lemme de Rokhlin

### 4.1 Existence d'un générateur dénombrable

Rappelons qu'une partition  $\mathcal{P}$  de  $X$ , qui peut être vue comme une application mesurable de  $X$  dans un alphabet fini ou dénombrable, est *génératrice* si

$$\bigvee_{k \in \mathbb{Z}} T^{-k} \mathcal{P} = \mathcal{A},$$

et que cela équivaut à l'existence d'une partie  $X_0$  de mesure 1 sur laquelle l'application  $x \mapsto \mathcal{P}|_{-\infty}^{+\infty}(x)$  qui à  $x$  associe son  $\mathcal{P}$ -nom soit injective.

**Théorème 4.1.** *Tout système dynamique apériodique admet une partition génératrice dénombrable.*

*Idée de la preuve.* (D'après [3].) On peut toujours supposer pour simplifier que le système dynamique est défini sur l'espace  $X = [0, 1]$ . Pour tout entier  $k \geq 1$ , on peut trouver une tour de Rokhlin  $\mathcal{T}_k$ , de base  $B_k$  et de hauteur  $h_k := 2^k$ , telle que

$$\mu(\mathcal{T}_k) \geq 1 - 1/2^k.$$

Le lemme de Borel-Cantelli assure alors que presque tout  $x \in X$  satisfait les deux propriétés suivantes :

- $x$  n'appartient qu'à un nombre fini de bases  $B_k$ ,
- $x$  est dans toutes les tours  $\mathcal{T}_k$  pour  $k$  assez grand.

Pour tout  $k \geq 1$ , on définit une partition finie  $\mathcal{P}_k$ , indexée par l'ensemble  $\{*\} \cup \{0, \dots, 9\}^{kh_k}$ , de la façon suivante : si  $x \in B_k$ ,  $\mathcal{P}_k(x)$  est la suite formée des  $k$  premières décimale de tous les points  $x, Tx, \dots, T^{h_k-1}x$ , et si  $x \notin B_k$ ,  $\mathcal{P}_k(x) := *$ .

Puis, on remarque que la suite  $(\mathcal{P}_k(x))_{k \geq 1}$  ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs possibles. En effet, pour presque tout  $x$  il n'existe qu'un nombre fini d'entiers  $k$  tels que  $\mathcal{P}_k(x) \neq *$ . On définit donc une partition dénombrable  $\mathcal{P}$  de  $X$  en posant

$$\mathcal{P}(x) := (\mathcal{P}_k(x))_{k \geq 1}.$$

Il n'y a plus qu'à vérifier que  $\mathcal{P}$  est génératrice. Prenons deux points  $x$  et  $y$  tels que le  $\mathcal{P}$ -nom de  $x$  et celui de  $y$  coïncident. Cela revient à dire que pour tout  $k \geq 1$ , le  $\mathcal{P}_k$ -nom de  $x$  et celui de  $y$  coïncident. Pour  $k$  assez grand,  $x$  est dans la tour  $\mathcal{T}_k$ . Soit  $j \in \{0, \dots, h_k - 1\}$  tel que  $x \in T^j B_k$ . Pour tout  $\ell \in \{0, \dots, j - 1\}$ , on a  $\mathcal{P}_k(T^{-\ell}x) = *$ , alors que  $\mathcal{P}_k(T^{-j}x)$  contient, entre autres informations, les  $k$  premières décimales de  $x$ . Comme  $\mathcal{P}_k(T^{-\ell}y) = \mathcal{P}_k(T^{-\ell}x)$  pour tout  $\ell$ , on en déduit que les  $k$  premières décimales de  $y$  sont égales à celle de  $x$ , d'où finalement  $x = y$  puisque c'est vrai pour tout  $k$  assez grand.  $\square$

**Corollaire 4.2.** *Tout système dynamique apériodique est isomorphe à un système de la forme  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  où  $X = \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$  et  $T$  est le décalage des coordonnées.*

## 4.2 Vitesse de convergence dans le théorème ergodique

Plaçons-nous toujours dans le cadre d'un automorphisme ergodique  $T$  de  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , avec  $\mu$  sans atome. Le théorème ergodique ponctuel de Birkhoff affirme que pour toute fonction  $f$  intégrable sur  $X$ , les moyennes  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k$  convergent presque sûrement vers  $\int_X f d\mu$ . La convergence a donc lieu aussi en probabilité; ainsi, pour tout  $\delta > 0$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k - \int_X f d\mu \right| > \delta \right) = 0. \quad (1)$$

Un problème naturel consiste alors à tenter d'estimer la vitesse de convergence dans (1), afin d'obtenir éventuellement un résultat de type *grandes déviations*. Or, comme conséquence du lemme de Rokhlin, on va voir que cette vitesse de convergence peut être, dans un système dynamique donné, arbitrairement lente : pour n'importe quelle suite  $(b_n)$  tendant vers  $+\infty$ , on peut trouver une fonction  $f \in L^1$  telle que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \mu \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k - \int_X f d\mu \right| > 1/2 \right) = +\infty.$$

Une preuve élégante de ce résultat, due à Dalibor Volný, utilise le lemme de Rokhlin et le théorème de Baire dans un espace de fonctions bien choisi.

Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble des  $f \in L^1(\mu)$  qui vérifient  $\mu(f = 1) = \mu(f = -1) = 1/2$ . On munit  $\mathcal{M}$  de la distance

$$d(f, g) := \mu(f \neq g),$$

qui fait de  $\mathcal{M}$  un espace métrique complet séparable.

**Théorème 4.3.** *Soit  $(b_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels positifs tendant vers  $+\infty$ . Alors il existe un ensemble  $G_\delta$ -dense dans  $\mathcal{M}$  de fonctions  $f$  telles que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \mu \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \right| > 1/2 \right) = +\infty. \quad (2)$$

*Démonstration.* Pour tout entier  $m \geq 1$ , notons  $H_m$  l'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{M}$  pour lesquelles il existe un entier  $n \geq m$  tel que

$$b_n \mu \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \right| > 1/2 \right) > m.$$

Alors  $f$  vérifie (2) si et seulement si  $f \in \bigcap_{m \geq 1} H_m$ . Pour démontrer le résultat annoncé, il suffit donc de vérifier que chaque  $H_m$  est un ouvert dense dans  $\mathcal{M}$ . Or,  $H_m$  est clairement ouvert car, à  $n$  fixé,  $f \mapsto \mu \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \right| > 1/2 \right)$  est continue sur  $\mathcal{M}$ .

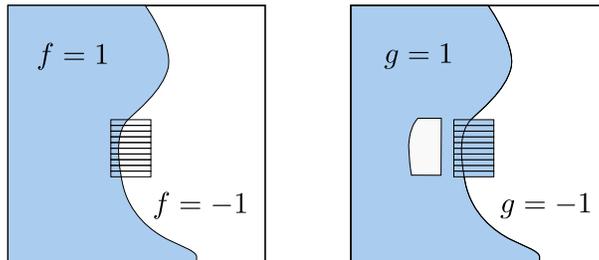


FIGURE 6 – Construction de  $g$  à partir de  $f$  et de la tour

La densité de  $H_m$  s'obtient en utilisant le lemme de Rokhlin : soit  $m \geq 1$ ,  $f \in \mathcal{M}$  et  $\varepsilon > 0$  (on peut supposer  $\varepsilon < 1/2$ ). On cherche à construire  $g \in H_m$  avec  $d(f, g) < \varepsilon$ . Pour cela, choisissons d'abord  $n$  assez grand pour que  $n > m$  et  $b_n \varepsilon / 8 > m$ . Grâce au lemme de Rokhlin, on peut trouver une tour de Rokhlin  $\mathcal{T}$  de hauteur  $2n$  et de mesure égale à  $\varepsilon/4$ . On vérifie facilement que

$$\mu((f = -1) \cap \mathcal{T}) < \mu((f = 1) \cap (X \setminus \mathcal{T})).$$

On peut donc trouver une partie  $C$  de  $(f = 1) \cap (X \setminus \mathcal{T})$  de mesure  $\mu(C) = \mu((f = -1) \cap \mathcal{T})$ . On pose alors  $g = 1$  sur  $\mathcal{T}$ ,  $g = -1$  sur  $C$ ,  $g = f$  sur le reste de  $X$ . On a clairement  $d(f, g) < 2\mu(\mathcal{T}) < \varepsilon$ , et sur les  $n$  premiers étages de la tour, (dont la réunion est de mesure  $\varepsilon/8$ ), on a

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g \circ T^k \right| = 1 > 1/2,$$

ce qui prouve que  $g \in H_m$ . □

## Références

- [1] E. GHYS, *Variations autour du théorème de récurrence de Poincaré*, Le journal de maths des élèves, ENS Lyon **1** (1994), no. 1, 3–11.
- [2] S. KAKUTANI, *Induced measure preserving transformations*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **19** (1943), 635–641.
- [3] S. KALIKOW and R. MCCUTCHEON, *An outline of ergodic theory*, 2010.