CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE ROUEN UNIVERSITÉ DU HAVRE INSA DE ROUEN

PUBLICATION de l'UPRESA 6085
ANALYSE et MODÈLES STOCHASTIQUES

L'ERGODICITÉ INDUIT UN TYPE SPECTRAL MAXIMAL ÉQUIVALENT À LA MESURE DE LEBESGUE

Thierry de la RUE

Document 1997-07

Université de Rouen UFR des sciences
Mathématiques, Site Colbert, UPRESA 6085
F 76821 MONT SAINT AIGNAN Cedex
Tél: (33)(0) 235 14 71 00   Fax: (33)(0) 232 10 37 94

L'ergodicité induit un type spectral maximal équivalent à la mesure de Lebesgue

Thierry DE LA RUE
Analyse et Modèles Stochastiques – UPRES-A CNRS 6085
Université de Rouen – Mathématiques
Site Colbert
F76821 Mont-Saint-Aignan Cedex
e-mail : delarue@univ-rouen.fr

Résumé

On montre ici que tout automorphisme ergodique d'un espace de Lebesgue induit, sur une famille dense de parties de l'espace, des transformations dont le type spectral maximal est équivalent à la mesure de Lebesgue.

Ergodicity induces a Lebesgue maximal spectral type

Abstract

It is shown that every ergodic automorphism of a Lebesgue space induces, on a dense class of sets, some transformations whose maximal spectral type is equivalent to the Lebesgue measure.

1 Introduction et notations

On désigne par T un automorphisme ergodique de l'espace de Lebesgue $(X, \mathscr{A}, m)$. Si $f \in L^2(m)$, on note σ_f la mesure spectrale de f sous l'action de T, c'est-à-dire la mesure positive finie sur le cercle $\mathbb{T}$, identifié à l'intervalle $]-\pi, \pi]$, dont les coefficients de Fourier sont donnés par

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{\sigma_f}(p) \stackrel{\text{déf}}{=} \langle f \,,\, f \circ T^p \rangle_{L^2(m)} .$$

On munit l'ensemble des mesures positives finies sur $\mathbb{T}$ de la topologie de la convergence faible ; cette topologie étant métrisable, on fixe une distance d_{w^*} qui la définit. On note enfin λ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$.

1.1 Induction et propriétés spectrales

Kakutani ([6]) a introduit en 1943 la notion de transformation induite par T sur une partie mesurable non négligeable de X. Pour tout $A \in \mathscr{A}$ de mesure strictement positive, on définit la tribu $\mathscr{A}_A \stackrel{\text{déf}}{=} \{B \cap A, \, B \in \mathscr{A}\}$, et la probabilité $m_A \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{m(A)} m|_{\mathscr{A}_A}$. La *transformation induite par T sur A* est l'automorphisme T_A de l'espace de Lebesgue $(A, \mathscr{A}_A, m_A)$ défini par

$$T_A\, x \ \stackrel{\text{déf}}{=}\ T^{r_A(x)} x,$$

où $r_A(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf\{k \geq 1, T^k x \in A\}$ est le *temps de retour de x en A*, qui est fini pour presque tout x dans A par le théorème de récurrence de Poincaré. Pour $p \geq 1$, on définit également de façon évidente le p-ième temps de retour en A, noté r_A^p, de sorte que pour presque tout x dans A,

$$T_A^p\, x \ = \ T^{r_A^p(x)} x.$$

L'induction conserve l'ergodicité, mais de multiples travaux prouvent que d'autres propriétés spectrales peuvent être gagnées ou perdues en induisant. Ainsi, Conze ([2]) et Hansel ([5]) ont établi que T pouvait toujours induire une transformation ayant une valeur propre fixée à l'avance (ce qui peut aussi être vu comme une conséquence de la théorie de l'équivalence au sens de Kakutani, développée un peu plus tard dans [8]). Inversement, Chacon a montré dans [1] que l'on pouvait aussi obtenir par induction par T une transformation faiblement mélangeante ; ce résultat fut amélioré par Friedman et Ornstein, qui prouvent dans [4] que l'on peut même induire une transformation mélangeante. De plus, l'ensemble des A pour lesquels T_A possède l'une de ces propriétés spectrales est toujours dense dans $\mathscr{A}$, la tribu $\mathscr{A}$ étant munie de la distance

$$d(A, B) \ \stackrel{\text{déf}}{=}\ m(A \Delta B)$$

(on identifie deux ensembles de différence symétrique négligeable).

On se propose ici de renforcer encore le résultat de Friedman et Ornstein, en montrant comment construire A tel que le type spectral maximal de T_A soit équivalent à la mesure de Lebesgue. Cette propriété, qui implique le mélange en vertu du lemme de Riemann-Lebesgue, peut se caractériser de la façon suivante : il existe une famille dénombrable (f_n), dense dans le sous-espace de L^2 formé des fonctions de moyenne nulle, telle que pour tout n, la mesure spectrale de f_n soit équivalente à la mesure de Lebesgue. On ne sait pas si cela entraîne le spectre de Lebesgue.

Il est déjà connu que T induit le spectre de Lebesgue dans les deux cas suivants : si T est d'entropie strictement positive, car alors T induit un K-système (voir [9]), ou si T est d'entropie nulle et lâchement Bernoulli (par exemple si T est une rotation irrationnelle), car le flot horocyclique est lui-même d'entropie nulle et lâchement Bernoulli (voir [10]), et a spectre de Lebesgue.

1.2 Mesure spectrale induite

Si $A \in \mathscr{A}$ est de mesure non nulle, pour tout $f \in L^2(m)$, $f|_A$ est dans $L^2(m_A)$. On note alors $\sigma_{f,A}$ la mesure spectrale de $f|_A$ sous l'action de T_A.

Lemme 1 *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathscr{A}$*, et* $A \in \mathscr{A}$*. On suppose que* A *et tous les* A_n *sont de mesure non nulle, et que*

$$m(A\Delta A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Alors pour toute fonction f *dans* $L^\infty(m)$*, on a*

$$\sigma_{f,A_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{w^*} \sigma_{f,A}.$$

Preuve — Il suffit de montrer que pour tout $p \geq 0$,

$$\widehat{\sigma_{f,A_n}}(p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \widehat{\sigma_{f,A}}(p).$$

C'est évident pour $p = 0$, on suppose donc $p \geq 1$. Étant donné $\varepsilon > 0$, choisissons un entier N assez grand pour que

$$m\left(\{x \in \mathscr{A} \ / \ r_A^p(x) > N\}\right) \ \leq \ \varepsilon,$$

puis prenons n assez grand pour que

$$N\, m(A\Delta A_n) \ < \ \varepsilon, \quad \text{et} \quad \left|1 - \frac{m(A)}{m(A_n)}\right| \ < \ \varepsilon.$$

Posons $B \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{j=1}^N T^{-j}(A\Delta A_n)$; alors $m(B) < \varepsilon$, et si x dans $A \cap A_n \cap B^c$ est tel que $r_A^p(x) \leq N$, alors $r_A^p(x) = r_{A_n}^p(x)$. On a donc

$$\begin{aligned}
&|\widehat{\sigma_{f,A_n}}(p) - \widehat{\sigma_{f,A}}(p)| \\
&\quad = \left| \frac{1}{m(A)} \int_A f\bar{f} \circ T^{r_A^p}\, dm - \frac{1}{m(A_n)} \int_{A_n} f\bar{f} \circ T^{r_{A_n}^p}\, dm \right| \\
&\quad \leq \frac{\|f\|_\infty^2}{m(A)} \left(\left|1 - \frac{m(A)}{m(A_n)}\right| + m(A\Delta A_n) + m(r_A^p > N) + m(B) \right) \\
&\quad \leq 4\,\varepsilon \frac{\|f\|_\infty^2}{m(A)}.
\end{aligned}$$

□

2 Étalement d'une mesure spectrale par produit gauche avec un Bernoulli

Étant donné un nombre réel $\delta \in]0, 1[$, on définit sur l'espace

$$\Omega \stackrel{\text{déf}}{=} \{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$$

la probabilité P_δ, sous laquelle les coordonnées $(\omega_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ d'un point $\omega \in \Omega$ sont des variables aléatoires indépendantes vérifiant, pour tout entier p,

$$P_\delta(\omega_p = 1) \ = \ 1 - \delta.$$

Le décalage des coordonnées, noté S, définit sur Ω muni de la probabilité P_δ un système dynamique de Bernoulli.

$(X, \mathscr{A}, m, T)$ étant un système dynamique ergodique, on définit sur l'espace $\Omega \times X$ la transformation $\tilde{T}$ par

$$\tilde{T}(\omega, x) \stackrel{\text{déf}}{=} (S\omega, T^{\omega_0}x).$$

Cette transformation est appelée un *produit gauche* de S et T ; elle préserve bien sûr la mesure produit, et certaines de ses propriétés ont été étudiées par I. Meilijson ([7]), dans un cadre un peu plus général. Meilijson démontre le résultat suivant, utilisé notamment par Ornstein et Smorodinsky dans [9].

Théorème 2 (Meilijson) *Le produit gauche $\tilde{T}$ défini ci-dessus est un K-système.*

On n'aura pas besoin ici de ce théorème, mais il a néanmoins inspiré le travail qui va suivre.

2.1 Étude d'une mesure spectrale dans le produit gauche

Soit $f \in L^2(m)$, de moyenne nulle (ce qui assure que $\sigma_f(\{0\}) = 0$, car T est ergodique). On définit sur $\Omega \times X$ la fonction $\tilde{f}$ par $\tilde{f}(\omega, x) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x)$, et on note $\sigma_{\tilde{f}}$ la mesure spectrale de $\tilde{f}$ sous l'action de $\tilde{T}$. Un K-système ayant toujours spectre de Lebesgue, le théorème de Meilijson énoncé ci-dessus laisse prévoir que $\sigma_{\tilde{f}}$ est absolument continue par rapport à λ. L'étude qui va suivre confirme ce résultat, et montre même que $\sigma_{\tilde{f}}$ est *équivalente* à λ.

On a

$$\widehat{\sigma_{\tilde{f}}}(0) = \left\|\tilde{f}\right\|^2_{L^2(P_\delta \otimes m)} = \|f\|^2_{L^2(m)} = \widehat{\sigma_f}(0),$$

puis, pour $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma_{\tilde{f}}}(p) &= \int_{\Omega \times X} \tilde{f}\,\overline{\tilde{f} \circ \tilde{T}^p}\, d(P_\delta \otimes m) \\
&= \int_\Omega dP_\delta(\omega) \left(\int_X f(x) \bar{f}(T^{\omega_0 + \cdots + \omega_{p-1}} x)\, dm(x) \right) \\
&= \int_\Omega dP_\delta(\omega) \left(\int_{\mathbb{T}} e^{-i(\omega_0 + \cdots + \omega_{p-1})\tau} d\sigma_f(\tau) \right) \\
&= \int_{\mathbb{T}} d\sigma_f(\tau) \left(\int_\Omega e^{-i(\omega_0 + \cdots + \omega_{p-1})\tau} dP_\delta(\omega) \right) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \left(r_{\delta\tau}\, e^{i\theta_{\delta\tau}} \right)^p d\sigma_f(\tau),
\end{aligned}$$

où $r_{\delta\tau} \geq 0$ et $\theta_{\delta\tau} \in \mathbb{T}$ sont définis par

$$r_{\delta\tau}\, e^{i\theta_{\delta\tau}} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_\Omega e^{-i\omega_0\tau} dP_\delta(\omega) = (1-\delta)e^{-i\tau} + \delta e^{-2i\tau}. \tag{1}$$

Si $p < 0$, on a enfin

$$\widehat{\sigma_{\tilde{f}}}(p) = \overline{\widehat{\sigma_{\tilde{f}}}(-p)}.$$

Ce calcul montre déjà que, δ étant fixé, la mesure spectrale $\sigma_{\tilde{f}}$ de $\tilde{f}$ dans le produit gauche ne dépend que de la mesure spectrale de f sous l'action de T. Ceci nous amène à poser la définition suivante.

Définition 3 *Si σ est une mesure positive finie sur $\mathbb{T}$ qui vérifie $\sigma(\{0\}) = 0$, et si $\delta \in]0, 1[$, on appelle* δ-étalée de σ *la mesure sur $\mathbb{T}$, notée $(\sigma)_\delta$, dont les coefficients de Fourier sont donnés par*

$$\begin{array}{rrcl} & \widehat{(\sigma)_\delta}(0) & \stackrel{\text{déf}}{=} & \widehat{\sigma}(0) \;=\; \sigma(\mathbb{T}), \\ \textit{pour } p > 0, & \widehat{(\sigma)_\delta}(p) & \stackrel{\text{déf}}{=} & \displaystyle\int_{\mathbb{T}} \left(r_{\delta\tau}\, e^{i\theta_{\delta\tau}}\right)^p d\sigma(\tau), \\ & & & \quad \textit{où } r_{\delta\tau} \textit{ et } \theta_{\delta\tau} \textit{ sont définis par (1),} \\ \textit{et pour } p < 0, & \widehat{(\sigma)_\delta}(p) & \stackrel{\text{déf}}{=} & \overline{\widehat{(\sigma)_\delta}(-p)}. \end{array}$$

2.2 Propriétés de la δ-étalée d'une mesure σ.

Proposition 4 *Soit σ une mesure finie non nulle sur $\mathbb{T}$, telle que $\sigma(\{0\}) = 0$, et soit $\delta \in]0, 1[$. La δ-étalée de σ est toujours équivalente à λ, sa densité étant donnée par*

$$\frac{d(\sigma)_\delta}{d\lambda}(t) \;=\; \int_{\mathbb{T}} f_{\delta t}(\tau)\, d\sigma(\tau),$$

où

$$f_{\delta t}(\tau) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1 - r_{\delta\tau}^2}{1 + r_{\delta\tau}^2 - 2\, r_{\delta\tau} \cos(\theta_{\delta\tau} + t)}.$$

Cette densité est continue et strictement positive sur $\mathbb{T} \setminus \{0\}$. Enfin, la δ-étalée de λ reste égale à λ.

Preuve — Pour $n \geq 1$, notons σ_n la mesure sur $\mathbb{T}$ définie par

$$\frac{d\sigma_n}{d\sigma} \stackrel{\text{déf}}{=} 1 - \mathbb{1}_{]-1/n, 1/n[}.$$

On a pour tout $p \in \mathbb{Z}$

$$\left|\widehat{(\sigma_n)_\delta}(p)\right| \;=\; \left|\int_{\mathbb{T}\setminus]-1/n,1/n[} \left(r_{\delta\tau}\, e^{i\theta_{\delta\tau}}\right)^{|p|} d\sigma(\tau)\right|,$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{p\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{(\sigma_n)_\delta}(p)\right| &\leq \sum_{p\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}\setminus]-1/n,1/n[} r_{\delta\tau}^{|p|}\, d\sigma(\tau) \\ &= \sigma\Big(\mathbb{T}\setminus]-1/n, 1/n[\Big) + 2\int_{\mathbb{T}\setminus]-1/n,1/n[} \frac{r_{\delta\tau}}{1 - r_{\delta\tau}}\, d\sigma(\tau) \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

car

$$\max\Big\{r_{\delta\tau},\ \tau \in \mathbb{T}\setminus]-1/n, 1/n[\Big\} \;<\; 1.$$

On en déduit que $(\sigma_n)_\delta$ est absolument continue par rapport à λ, et que sa densité vaut

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t) &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d(\sigma_n)_\delta}{d\lambda}(t) \\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{(\sigma_n)_\delta}\,(p)\, e^{ipt} \qquad (2)\\
&= \int_{\mathbb{T}\setminus]-1/n,1/n[} \left(1 + 2\,\Re e\,\left(\sum_{p\geq 1} r_{\delta\tau}^p e^{ip(\theta_{\delta\tau}+t)}\right)\right) d\sigma(\tau) \\
&= \int_{\mathbb{T}\setminus]-1/n,1/n[} f_{\delta t}(\tau)\, d\sigma(\tau).
\end{aligned}$$

Comme $f_{\delta t}(\tau) \geq 0$, la suite des densités (φ_n) est croissante ; notons φ sa limite. Puisque $\sigma(\{0\}) = 0$, on a

$$\varphi(t) \;=\; \int_{\mathbb{T}} f_{\delta t}(\tau)\, d\sigma(\tau),$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} \varphi(t)\, d\lambda(t) &= \lim_n \int_{\mathbb{T}} \varphi_n(t)\, d\lambda(t) \\
&= \lim_n \sigma_n(\mathbb{T}) \\
&= \sigma(\mathbb{T}).
\end{aligned}$$

Appelons provisoirement ν la mesure dont la densité par rapport à λ vaut φ. On a aussi, pour tout $p \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\widehat{\nu}(p) &= \int_{\mathbb{T}} \varphi(t) e^{-ipt}\, d\lambda(t) \\
&= \lim_n \int_{\mathbb{T}} \varphi_n(t) e^{-ipt}\, d\lambda(t) \\
&= \lim_n \widehat{(\sigma_n)_\delta}\,(p) \\
&= \widehat{(\sigma)_\delta}\,(p),
\end{aligned}$$

et donc $\nu = (\sigma)_\delta$.

Par ailleurs, comme $r_{\delta\tau} < 1$ dès que $\tau \neq 0$, il est clair que $\varphi(t) > 0$ si σ est non nulle. La δ-étalée de σ est donc équivalente à λ.

Puis, on voit facilement que φ_n est continue sur $\mathbb{T}$ (car la série (2) converge normalement sur $\mathbb{T}$). Pour montrer la continuité de φ sur $\mathbb{T} \setminus \{0\}$, il suffit donc de prouver que pour tout $\gamma > 0$, φ_n converge uniformément sur $\mathbb{T}\setminus]-\gamma,\gamma[$. Or, on a clairement

$$\theta_{\delta\tau} \xrightarrow[\tau\to 0]{} 0,$$

et donc, $\gamma > 0$ étant fixé, dès que n est assez grand on a

$$\forall t \in \mathbb{T}\setminus]-\gamma,\gamma[,\ \forall \tau \in]-1/n,1/n[, \quad \cos(\theta_{\delta\tau} + t) \;<\; \cos(\gamma/2).$$

Ainsi, si n est assez grand, on a pour tout $t \in \mathbb{T} \setminus]-\gamma, \gamma[$,

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \int_{]-1/n,1/n[} \frac{1 - r_{\delta\tau}^2}{1 + r_{\delta\tau}^2 - 2\, r_{\delta\tau} \cos(\gamma/2)}\, d\sigma(\tau)$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Enfin, remarquons que pour tout $p > 0$,

$$\begin{aligned} \widehat{(\lambda)_\delta}(p) &= \int_{\mathbb{T}} \left((1-\delta) e^{-i\tau} + \delta e^{-2i\tau} \right)^p \, d\lambda(\tau) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k (1-\delta)^{p-k} \delta^k \int_{\mathbb{T}} e^{-i(p+k)\tau} d\lambda(\tau) \;=\; 0. \end{aligned}$$

On a donc bien $(\lambda)_\delta = \lambda$, ce qui achève la preuve de la proposition 4. $\square$

Des résultats qui viennent d'être établis, on déduit facilement un corollaire utile dans la suite.

Corollaire 5 *Pour tout $t \neq 0$, on a*

$$\int_{\mathbb{T}} f_{\delta t}(\tau)\, d\lambda(\tau) = 1.$$

2.3 Approximations de la δ-étalée de σ_f par induction.

On fixe ici un réel $\delta \in]0, 1/2[$, et une fonction simple de moyenne nulle

$$f = \sum_{l=1}^{L} \alpha_l \, \mathbb{1}_{P_l},$$

où les α_l sont des nombres complexes, et $\mathscr{P} \stackrel{\text{déf}}{=} \{P_1, \ldots, P_L\}$ est une partition finie de X.

Prenons un entier $h \geq 3$. Le lemme de Rokhlin-Halmos assure qu'il existe un F dans $\mathscr{A}$ tel que

- $F, TF, \ldots, T^{h-1}F$ sont deux à deux disjoints,
- $m\left(X \setminus \bigcup_{j=0}^{h-1} T^j F\right) < 1/h$,
- F est indépendant de la partition $\mathscr{Q} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigvee_{j=0}^{h-1} T^{-j} \mathscr{P}$.

Pour $k \geq 1$, soit $S_k \stackrel{\text{déf}}{=} \{1, 2\}^k$. Si $s = (s_0, \ldots, s_{k-1}) \in S_k$, on note

$$P_\delta(s) \stackrel{\text{déf}}{=} P_\delta(\omega_0 = s_0, \ldots, \omega_{k-1} = s_{k-1}).$$

On peut partitionner F en 2^h parties notées F_s, $s \in S_h$, de telle sorte que, pour tout atome Q de $\mathscr{Q}$, et tout $s \in S_h$, on ait

$$m(F_s \cap Q) = m(F)\, m(Q)\, P_\delta(s).$$

Posons aussi, pour $s = (s_0, \ldots, s_{h-1}) \in S_h$,

$$r(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \max\{j \geq 0 \,/\, s_0 + \cdots + s_j \leq h - 1\}.$$

On définit enfin $B \in \mathscr{A}$ par

$$B \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{s \in S_h} T^{s_0} F_s \cup T^{s_0+s_1} F_s \cup \cdots \cup T^{s_0+\cdots+s_{r(s)}} F_s.$$

Lemme 6 *Étant donné $\varepsilon > 0$, si on choisit h assez grand, l'ensemble B construit ci-dessus vérifie*

$$m(B) \; > \; 1 - 2\delta, \tag{3}$$

$$\text{et} \qquad d_{w^*}\Big((\sigma_f)_\delta, \sigma_{f,B}\Big) \; < \; \varepsilon. \tag{4}$$

Preuve — On vérifie facilement que

$$X \setminus B \; \subset \; F \cup \left(X \setminus \bigcup_{j=0}^{h-1} T^j F \right) \cup TD,$$

où

$$D \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{j=0}^{h-2} \bigcup_{\substack{s \in S_h \\ s_j = 2}} T^j F_s.$$

Or, j étant fixé, on a

$$m\left(\bigcup_{\substack{s \in S_h \\ s_j = 2}} T^j F_s \right) \; = \; \delta\, m(F),$$

et donc, dès que h est assez grand,

$$m(X \setminus B) \; < \; 2/h + \delta \; < \; 2\delta,$$

ce qui prouve (3).

Pour établir (4), il suffit de voir que, étant donné $p \in \mathbb{N}$, $\widehat{\sigma_{f,B}}\,(p)$ est arbitrairement proche de $\widehat{(\sigma_f)}_\delta\,(p)$ pour h assez grand. Pour cela, écrivons $\widehat{\sigma_{f,B}}\,(p)$ sous la forme

$$\widehat{\sigma_{f,B}}\,(p) \; = \; \frac{1}{m(B)} \left(\int_{B_1} f\,\bar{f} \circ T_B^p \, dm + \int_{B_2} f\,\bar{f} \circ T_B^p \, dm \right),$$

avec

$$B_1 \stackrel{\text{déf}}{=} B \cap (TF \cup T^2 F \cup \cdots \cup T^{h-1-2p} F), \quad \text{et } B_2 \stackrel{\text{déf}}{=} B \setminus B_1.$$

Comme $m(B_2) \leq 2p/h$, pour h assez grand, en utilisant (3) on obtient

$$\left| \frac{1}{m(B)} \int_{B_2} f\,\bar{f} \circ T_B^p \, dm \right| \; \leq \; \frac{1}{1 - 2\delta} \, \frac{2p}{h} \, \|f\|_\infty^2 . \tag{5}$$

Puis, pour $j \in \{1, \ldots, h-1-2p\}$, on a

$$\int_{B\cap T^j F} f\,\bar f \circ T_B^p \, dm \;=\; \sum_{\substack{s\in S_h \\ \exists k,\; s_0+\cdots+s_k=j}} \int_{T^j F_s} f\,\bar f \circ T^{s_{k+1}+\cdots+s_{k+p}} \, dm.$$

Or, par construction de F_s, $T^j F_s$ est à chaque fois indépendant de la partition $\mathscr{P} \vee T^{-(s_{k+1}+\cdots+s_{k+p})}\mathscr{P}$. Dans le second membre de l'égalité ci-dessus, on a donc

$$\int_{T^j F_s} f\,\bar f \circ T^{s_{k+1}+\cdots+s_{k+p}} \, dm \;=\; m(F_s) \int_X f\,\bar f \circ T^{s_{k+1}+\cdots+s_{k+p}} \, dm.$$

En écrivant $m(F_s) = m(F)P_\delta(s) = m(F)P_\delta(s_0, \ldots, s_k)P_\delta(s_{k+1}, \ldots, s_{k+p})$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{B\cap T^j F} f\,\bar f \circ T_B^p \, dm \;&=\; \left(m(F) \sum_{s_0+\cdots+s_k=j} P_\delta(s_0, \ldots, s_k) \right) \times \\ &\qquad \sum_{(s_{k+1},\ldots,s_{k+p})\in S_p} P_\delta(s_{k+1}, \ldots, s_{k+p}) \int_X f\,\bar f \circ T^{s_{k+1}+\cdots+s_{k+p}} \, dm \\ &=\; m(B \cap T^j F)\,\widehat{(\sigma_f)}_\delta\,(p),\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{m(B)} \int_{B_1} f\,\bar f \circ T_B^p \, dm \;=\; \frac{m(B_1)}{m(B)}\,\widehat{(\sigma_f)}_\delta\,(p). \tag{6}$$

Or, si h est assez grand pour avoir (3), on a

$$1 - \frac{2p}{h(1-2\delta)} \;\le\; \frac{m(B_1)}{m(B)} \;\le\; 1.$$

On déduit alors facilement (4) de (5) et (6). $\square$

Observons maintenant que l'ensemble B construit précédemment est indépendant de $\mathscr{P}$, ce qui entraîne

$$\int_B f \, dm \;=\; 0.$$

Enfin, il n'est pas difficile de voir que cette construction peut s'effectuer en traitant simultanément un nombre fini de fonctions simples de moyenne nulle. En conclusion de cette partie, on peut donc formuler la proposition suivante.

Proposition 7 *Si δ est un nombre réel dans $]0, 1/2[$, et si $f_1, \ldots, f_n$ sont n fonctions simples de moyenne nulle sur X, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut construire $B \in \mathscr{A}$, indépendant de chaque f_i, vérifiant*

$$m(B) \;>\; 1 - 2\delta,$$

et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$d_{w^*}\Big((\sigma_{f_i})_\delta, \sigma_{f_i,B} \Big) \;<\; \varepsilon.$$

3 Induction du type spectral maximal équivalent à la mesure de Lebesgue

3.1 Contrôle de la densité

Lemme 8 *Soit γ un réel fixé dans $]0,\pi[$, soit $\varepsilon \in]0,1[$, et soient $a < b$ deux réels strictement positifs. On se donne une probabilité σ sur $\mathbb{T}$, absolument continue par rapport à λ.*

Si σ vérifie

$$\forall t \in \mathbb{T}\backslash]-\gamma,\gamma[, \quad a \;\leq\; \frac{d\sigma}{d\lambda}(t) \;\leq\; b,$$

alors, pour $\delta \in]0,1[$ assez petit, il existe $\rho > 0$ tel que, pour toute mesure finie ν vérifiant $d_{w^*}(\sigma,\nu) < \rho$, on ait

$$\forall t \in \mathbb{T}\backslash]-\gamma(1+\varepsilon),\gamma(1+\varepsilon)[, \quad a(1-\varepsilon) \;\leq\; \frac{d(\nu)_\delta}{d\lambda}(t) \;\leq\; b(1+\varepsilon).$$

Preuve — Observons tout d'abord que

$$r_\delta \stackrel{\text{déf}}{=} \min_{\tau\in\mathbb{T}} r_{\delta\tau} \;=\; 1-2\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{} 1,$$

$$\text{et} \quad \max_{\tau\in\mathbb{T}} |\theta_{\delta\tau}+\tau| \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.$$

Choisissons donc δ assez petit pour que

$$\max_{\tau\in\mathbb{T}} |\theta_{\delta\tau}+\tau| \;<\; \gamma\varepsilon/2, \tag{7}$$

$$\text{et} \quad \frac{1-r_\delta^2}{1+r_\delta^2-2\cos(\gamma\varepsilon/2)} \;<\; (\varepsilon/3)\min\{b,1\}. \tag{8}$$

Pour tout $t \in \mathbb{T}\backslash]-\gamma(1+\varepsilon),\gamma(1+\varepsilon)[$, on peut écrire

$$\frac{d(\sigma)_\delta}{d\lambda}(t) \;=\; \int_{]-\gamma,\gamma[} f_{\delta t}(\tau)\,d\sigma(\tau) \;+\; \int_{\mathbb{T}\backslash]-\gamma,\gamma[} f_{\delta t}(\tau)\,d\sigma(\tau). \tag{9}$$

Dans la première intégrale, on a grâce à (7) $\theta_{\delta\tau} \in]-\gamma(1+\varepsilon/2),\gamma(1+\varepsilon/2)[$, d'où $\cos(\theta_{\delta\tau}+t) < \cos(\gamma\varepsilon/2)$. On a donc

$$f_{\delta t}(\tau) \;<\; \frac{1-r_\delta^2}{1+r_\delta^2-2\cos(\gamma\varepsilon/2)} \;<\; (\varepsilon/3)\min\{b,1\},$$

et comme $\sigma(\mathbb{T}) = 1$,

$$\int_{]-\gamma,\gamma[} f_{\delta t}(\tau)\,d\sigma(\tau) \;<\; \varepsilon b/3. \tag{10}$$

On a aussi

$$\int_{]-\gamma,\gamma[} f_{\delta t}(\tau)\,d\lambda(\tau) \;<\; \varepsilon/3. \tag{11}$$

Dans la seconde intégrale de (9), on vérifie $a \leq \frac{d\sigma}{d\lambda}(\tau) \leq b$. En utilisant le corollaire 5 et (11), on en déduit

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}\setminus]-\gamma,\gamma[} f_{\delta t}(\tau)\, d\sigma(\tau) &\geq a \int_{\mathbb{T}\setminus]-\gamma,\gamma[} f_{\delta t}(\tau)\, d\lambda(\tau) \\
&= a\left(1 - \int_{]-\gamma,\gamma[} f_{\delta t}(\tau)\, d\lambda(\tau)\right) \\
&\geq a(1-\varepsilon/3). \qquad (12)
\end{aligned}$$

Le corollaire 5 donne aussi

$$\int_{\mathbb{T}\setminus]-\gamma,\gamma[} f_{\delta t}(\tau)\, d\sigma(\tau) \leq b \int_{\mathbb{T}} f_{\delta t}(\tau)\, d\lambda(\tau) = b. \qquad (13)$$

De (10), (12) et (13), on tire

$$\forall t \in \mathbb{T}\setminus]-\gamma/(1+\varepsilon), \gamma/(1+\varepsilon)[, \quad a(1-\varepsilon/3) \leq \frac{d(\sigma)_\delta}{d\lambda}(t) \leq b(1+\varepsilon/3). \qquad (14)$$

Puis, δ étant fixé assez petit pour avoir (14), la famille de fonctions

$$\left\{ f_{\delta t},\ t \in \mathbb{T}\setminus]-\gamma/(1+\varepsilon), \gamma/(1+\varepsilon)[\right\}$$

forme un compact de $C(\mathbb{T})$. On peut donc trouver une partie finie $\{t_1, \ldots, t_r\}$ de $\mathbb{T}\setminus]-\gamma/(1+\varepsilon), \gamma/(1+\varepsilon)[$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{T}\setminus]-\gamma/(1+\varepsilon), \gamma/(1+\varepsilon)[, \quad \exists j \in \{1, \ldots, r\}, \quad \left\| f_{\delta t_j} - f_{\delta t} \right\|_\infty < \varepsilon a/6. \qquad (15)$$

On peut ensuite trouver $\rho > 0$ tel que, pour toute mesure positive finie ν sur $\mathbb{T}$ vérifiant $d_{w^*}(\sigma, \nu) < \rho$, on ait $\nu(\mathbb{T}) \leq 2$, et pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$

$$\int_{\mathbb{T}} f_{\delta t_j}\, d\nu \geq \int_{\mathbb{T}} f_{\delta t_j}\, d\sigma - \varepsilon a/3 \geq a(1-2\varepsilon/3),$$

$$\text{et} \quad \int_{\mathbb{T}} f_{\delta t_j}\, d\nu \leq \int_{\mathbb{T}} f_{\delta t_j}\, d\sigma + \varepsilon b/3 \leq b(1+2\varepsilon/3).$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{T}\setminus]-\gamma/(1+\varepsilon), \gamma/(1+\varepsilon)[$, en choisissant j donné par (15), on a dès que $d_{w^*}(\sigma, \nu) < \rho$

$$\frac{d(\nu)_\delta}{d\lambda}(t) = \int_{\mathbb{T}} f_{\delta t}\, d\nu \geq \int_{\mathbb{T}} f_{\delta t_j}\, d\nu - 2\left\| f_{\delta t_j} - f_{\delta t} \right\|_\infty \geq a(1-\varepsilon),$$

et de même

$$\frac{d(\nu)_\delta}{d\lambda}(t) \leq b(1+\varepsilon).$$

□

3.2 Induction d'une mesure spectrale équivalente à la mesure de Lebesgue

On fixe à nouveau une fonction simple dans $L^2(m)$

$$f \;=\; \sum_{l=1}^{L} \alpha_l \, \mathbb{1}_{P_l},$$

avec $\|f\|_{L^2} > 0$ et $\int_X f\, dm = 0$. On note $\mathscr{P}$ la partition $\{P_1, \ldots, P_L\}$.

Proposition 9 *Étant donné $\varepsilon \in]0,1[$, on peut toujours trouver $A \in \mathscr{A}$, avec $m(A) > 1 - \varepsilon$, tel que la mesure spectrale $\sigma_{f,A}$ de $f_{|A}$ pour T_A soit équivalente à la mesure de Lebesgue.*

Preuve — On fixe tout d'abord une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ de réels strictement positifs, telle que

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{+\infty}(1-\varepsilon_n) \quad &> \quad \max\{1/2\,,\,1-\varepsilon\}, \\ \text{et} \quad \prod_{n=1}^{+\infty}(1+\varepsilon_n) \quad &< \quad 2. \end{aligned}$$

On pose aussi $\varepsilon_0 \overset{\text{déf}}{=} 0$.

On va construire par récurrence une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante dans $\mathscr{A}$, avec $A_0 \overset{\text{déf}}{=} X$, deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, et une suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que pour tout n, $\delta_n \in]0, \varepsilon_{n+1}[$. Ces suites devront vérifier les propriétés suivantes, pour tout $n \geq 0$.

$(1)_n$ — $\quad m(A_n) \;\geq\; (1-\varepsilon_0)(1-\varepsilon_1)\ldots(1-\varepsilon_n)$

$(2)_n$ — $\quad A_n$ est indépendant de $\mathscr{P}$,

$(3)_n$ — $\quad$ si $n \geq 1$, $\quad d_{w^*}\Big(\sigma_{f,A_n}, (\sigma_{f,A_{n-1}})_{\delta_{n-1}}\Big) \;<\; 2^{-n}$,

$(4)_n$ — $\quad$ pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, on a

$$\forall t \in \mathbb{T}\backslash]-2^{-(j+1)}(1+\varepsilon_{j+1})\ldots(1+\varepsilon_n)\,,\,2^{-(j+1)}(1+\varepsilon_{j+1})\ldots(1+\varepsilon_n)[\,,$$

$$\frac{d(\sigma_{f,A_n})_{\delta_n}}{d\lambda}(t) \;\geq\; a_j(1-\varepsilon_j)\ldots(1-\varepsilon_n) \;\geq\; a_j/2, \qquad (16)$$

$$\text{et} \quad \frac{d(\sigma_{f,A_n})_{\delta_n}}{d\lambda}(t) \;\leq\; b_j(1+\varepsilon_j)\ldots(1+\varepsilon_n) \;\leq\; 2b_j, \qquad (17)$$

(en convenant que, si $j = n$, $(1+\varepsilon_{j+1})\ldots(1+\varepsilon_n) \overset{\text{déf}}{=} 1$).

Supposons ces suites déjà construites, et montrons alors que l'ensemble $A \overset{\text{déf}}{=} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ convient. Puisque $(1)_n$ est vérifiée pour chaque n, il est clair que $m(A) > 1 - \varepsilon$. Remarquons ensuite que, chaque A_n étant indépendant de $\mathscr{P}$, A est lui-même indépendant de $\mathscr{P}$, et donc $\int_A f\,dm = 0$; on en déduit que

$$\sigma_{f,A}(\{0\}) \;=\; 0. \tag{18}$$

Puis, comme f est bornée, on peut appliquer le lemme 1 qui donne

$$\sigma_{f,A_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{w^*} \sigma_{f,A}.$$

Par $(3)_n$, on a donc aussi

$$(\sigma_{f,A_n})_{\delta_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{w^*} \sigma_{f,A}.$$

On en déduit que, pour tout $j \geq 0$, $\sigma_{f,A}$ est la limite d'une suite de mesures équivalentes à λ, dont les densités sur $\mathbb{T}\backslash]-2^{-j},2^{-j}[$ sont toujours comprises entre $a_j/2$ et $2b_j$. Ce résultat ajouté à (18) prouve que $\sigma_{f,A}$ est équivalente à λ.

Il reste à voir comment construire les suites annoncées. Commençons par choisir arbitrairement un réel $\delta_0 \in]0,\varepsilon_1/2[$. Grâce à la proposition 4, on sait que $(\sigma_{f,A_0})_{\delta_0} = (\sigma_f)_{\delta_0}$ est équivalente à λ, sa densité étant continue et strictement positive sur $\mathbb{T}\setminus\{0\}$. On a donc

$$a_0 \;\stackrel{\text{déf}}{=}\; \min\left\{\frac{d(\sigma_f)_{\delta_0}}{d\lambda}(t),\; t\in\mathbb{T}\backslash]-1/2,1/2[\right\} \;>\; 0,$$

$$\text{et}\quad b_0 \;\stackrel{\text{déf}}{=}\; \max\left\{\frac{d(\sigma_f)_{\delta_0}}{d\lambda}(t),\; t\in\mathbb{T}\backslash]-1/2,1/2[\right\} \;<\; +\infty.$$

En utilisant le lemme 8, on peut choisir $\delta_1 \in]0,\varepsilon_2/2[$ assez petit pour qu'il existe $\rho_1 > 0$ vérifiant : pour toute mesure finie ν telle que $d_{w^*}\Big(\nu,(\sigma_f)_{\delta_0}\Big) < \rho_1$, pour tout $t\in\mathbb{T}\backslash]-(1+\varepsilon_1)/2,(1+\varepsilon_1)/2[$,

$$(1-\varepsilon_1)a_0 \;\leq\; \frac{d(\nu)_{\delta_1}}{d\lambda}(t) \;\leq\; (1+\varepsilon_1)b_0.$$

Puis, la proposition 7 assure qu'il existe $A_1 \in \mathscr{A}$ tel que

- $m(A_1) \;>\; 1-2\delta_0 \;>\; 1-\varepsilon_1$,
- A_1 est indépendant de $\mathscr{P}$,
- $d_{w^*}\Big((\sigma_f)_{\delta_0},\sigma_{f,A_1}\Big) \;<\; \min\{\rho_1,1/2\}$.

On pose alors

$$a_1 \;\stackrel{\text{déf}}{=}\; \min\left\{\frac{d(\sigma_{f,A_1})_{\delta_1}}{d\lambda}(t),\; t\in\mathbb{T}\backslash]-1/4,1/4[\right\},$$

$$b_1 \;\stackrel{\text{déf}}{=}\; \max\left\{\frac{d(\sigma_{f,A_1})_{\delta_1}}{d\lambda}(t),\; t\in\mathbb{T}\backslash]-1/4,1/4[\right\}.$$

À ce stade, les propriétés $(1)_n,\ldots,(4)_n$ sont vérifiées pour $n=0,1$.

Supposons maintenant connus $A_0, \ldots, A_n$, $a_0, \ldots, a_n$, $b_0, \ldots, b_n$ et $\delta_0, \ldots, \delta_n$ qui vérifient toutes les propriétés voulues jusqu'au rang n. On se place dans le cadre du système dynamique induit par T sur A_n. En appliquant le lemme 8, on peut choisir $\delta_{n+1} \in]0, \varepsilon_{n+2}[$ assez petit pour qu'il existe $\rho_{n+1} > 0$ vérifiant : pour toute mesure finie ν telle que $d_{w^*}\Big(\nu, (\sigma_{f,A_n})_{\delta_n}\Big) < \rho_{n+1}$, pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, on a

$$\forall t \in \mathbb{T}\backslash] - 2^{-(j+1)}(1+\varepsilon_j)\cdots(1+\varepsilon_{n+1}), 2^{-(j+1)}(1+\varepsilon_j)\cdots(1+\varepsilon_{n+1})[\,,$$

$$a_j(1-\varepsilon_j)\cdots(1-\varepsilon_{n+1}) \leq \frac{d(\nu)_{\delta_{n+1}}}{d\lambda}(t) \leq b_j(1+\varepsilon_j)\cdots(1+\varepsilon_{n+1}).$$

On utilise alors la proposition 7 pour trouver $A_{n+1} \subset A_n$, tel que

- $m(A_{n+1}) > (1-2\delta_n)\, m(A_n) > (1-\varepsilon_1)\cdots(1-\varepsilon_{n+1})$,
- A_{n+1} est indépendant de $\mathscr{P}$,
- $d_{w^*}\Big(\sigma_{f,A_{n+1}}, (\sigma_{f,A_n})_{\delta_n}\Big) < \min\{\rho_{n+1}, 2^{-(n+1)}\}$.

On pose enfin

$$a_{n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} \min\left\{\frac{d(\sigma_{f,A_{n+1}})_{\delta_{n+1}}}{d\lambda}(t),\ t \in \mathbb{T} \setminus \Big]-2^{-(n+2)}, 2^{-(n+2)}\Big[\right\},$$

$$b_{n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} \max\left\{\frac{d(\sigma_{f,A_{n+1}})_{\delta_{n+1}}}{d\lambda}(t),\ t \in \mathbb{T} \setminus \Big]-2^{-(n+2)}, 2^{-(n+2)}\Big[\right\}.$$

Alors les propriétés $(1)_{n+1}, \ldots, (4)_{n+1}$ sont vérifiées, ce qui prouve qu'il est possible de construire les suites annoncées par récurrence.

□

3.3 Obtention du résultat annoncé

Théorème 10 *Si $(X, \mathscr{A}, m, T)$ est un système dynamique ergodique, l'ensemble des $A \in \mathscr{A}$ pour lesquels le type spectral maximal de T_A est équivalent à λ est dense dans $\mathscr{A}$.*

Preuve — Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathscr{A}$ avec $m(A) > 1-\varepsilon$, tel que T_A ait la propriété annoncée. Pour cela, on se fixe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions simples et de moyenne nulle sur X, dense dans

$$L_0^2(m) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{f \in L^2(m) \Big/ \int_X f\,dm = 0\right\}.$$

Pour tout $C \in \mathscr{A}$ de mesure strictement positive, et tout $n \geq 0$, on pose

$$f_n^{(C)} \stackrel{\text{déf}}{=} f_n|_C - \int_C f_n\,dm \in L_0^2(m_B).$$

La proposition 9 peut facilement se généraliser de sorte à traiter simultanément un nombre fini de fonctions simples dans $L_0^2(m)$. Par la même méthode que dans la preuve de cette proposition, on construit l'ensemble A cherché comme l'intersection d'une suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'ensemble A_{n+1} étant construit à partir de A_n pour traiter simultanément les $n+1$ fonctions simples $f_0^{(A_0)}|_{A_n}, f_1^{(A_1)}|_{A_n}, \ldots, f_n^{(A_n)}|_{A_n}$ dans $L_0^2(m_{A_n})$ (les détails de cette construction sont laissés au lecteur). On obtient ainsi A tel que, pour tout $n \geq 0$, la mesure spectrale de $f_n^{(A)}$ sous l'action de T_A est équivalente à λ. Or, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant dense dans $L_0^2(m)$, la suite $\left(f_n^{(A)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle-même dense dans $L_0^2(m_A)$. La transformation induite par T sur A a donc un type spectral maximal équivalent à le mesure de Lebesgue. $\square$

Références

[1] R.V. Chacon. Change of velocity in flows. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 16(5) : 417–431, 1966.

[2] J.P. Conze. Équations fonctionnelles et systèmes induits en théorie ergodique. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, 23 : 75–82, 1972.

[3] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin, et Ya.G. Sinai. *Ergodic Theory*. Springer-Verlag, 1982.

[4] N.A. Friedman et D.S. Ornstein. Ergodic transformations induce mixing transformations. *Advannces in Mathematics*, 10 : 147–163, 1973.

[5] G. Hansel. Automorphismes induits et valeurs propres. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, 25 : 75–82, 1973.

[6] S. Kakutani. Induced measure preserving transformations. *Proc. Acad. Tokyo*, 19 : 635–641, 1943.

[7] I. Meilijson. Mixing properties of a class of skew-products. *Israel Journal of Mathematics*, 19 : 266–270, 1974.

[8] D.S. Ornstein, D.J. Rudolph, et B. Weiss. *Equivalence of Measure Preserving Transformations*. Memoirs of the American Mathematical Society 262, 1982.

[9] D.S. Ornstein et M. Smorodinsky. Ergodic flows of positive entropy can be time changed to become K-flows. *Israel Journal of Mathematics*, 26 : 75–83, 1977.

[10] M. Ratner. Horocycle flows are loosely Bernoulli. *Israel Journal of Mathematics*, 31 : 122–131, 1978.