CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE ROUEN UNIVERSITÉ DU HAVRE INSA DE ROUEN

PUBLICATION de l'URA 1378
ANALYSE et MODÈLES STOCHASTIQUES

L'INDUCTION NE DONNE PAS TOUTES LES MESURES SPECTRALES

Thierry DE LA RUE

Document 1996-11

Université de Rouen UFR des sciences
Mathématiques, Site Colbert, URA 1378
F 76821 MONT SAINT AIGNAN Cedex
Tél: 35 14 71 00 Fax: 32 10 37 94

L'induction ne donne pas toutes les mesures spectrales

Thierry DE LA RUE
Analyse et Modèles Stochastiques – URA CNRS 1378
Université de Rouen – Mathématiques
Site Colbert
F76821 Mont-Saint-Aignan Cedex
e-mail : delarue@univ-rouen.fr

Abstract

We show here that some finite measure on $[-\pi, \pi]$ can never be obtained as a spectral measure of a transformation induced by a rotation. For this, we propose a new way to build a Kronecker set, which leads to a non loosely Bernoulli Gaussian-Kronecker automorphism.

Résumé

On montre ici qu'une certaine mesure finie sur $[-\pi, \pi]$ ne peut jamais être obtenue comme mesure spectrale d'une transformation induite par une rotation. On propose pour cela une nouvelle façon de construire un ensemble de Kronecker, qui permet de voir que certains systèmes dynamiques gaussiens-Kronecker ne sont pas lâchement Bernoulli.

1 Introduction

Les systèmes dynamiques étudiés ici sont toujours de la forme $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, T)$, où T est une transformation mesurable inversible et préservant la probabilité μ sur l'espace de Lebesgue $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. Lorsqu'aucune précision supplémentaire n'est indispensable, on désignera un tel système par la seule donnée de la transformation T.

1.1 L'induction

Si A est une partie mesurable de Ω, de mesure non nulle, on définit le *temps de retour dans A* par

$$r_A(\omega) \overset{\text{déf}}{=} \min \{p \geq 1 \ / \ T^p\omega \in A\} .$$

Le théorème de récurrence de Poincaré affirme que pour μ-presque tout $\omega \in A$, $r_A(\omega)$ est fini. On note alors T_A la transformation de A définie par

$$T_A\omega \overset{\text{déf}}{=} T^{r_A(\omega)}\omega.$$

On note aussi $\mathscr{A}_A$ l'ensemble des parties mesurables de Ω qui sont contenues dans A, et $\mu_A \overset{\text{déf}}{=} \mu(\cdot)/\mu(A)$ la restriction normalisée de μ à $\mathscr{A}_A$. Il est bien connu qu'alors T_A est une transformation mesurable inversible et préservant la probabilité μ_A. Le système dynamique $(A, \mathscr{A}_A, \mu_A, T_A)$ ainsi obtenu est appelé *système induit par T sur A*.

Le problème se pose de savoir quels sont les systèmes dynamiques qui peuvent être induits par une transformation ergodique donnée T. (Notons au passage que si T est ergodique, toute transformation induite par T l'est également.) En 1943, Kakutani ([4]) a introduit une relation d'équivalence dont l'étude est étroitement liée à cette question.

> Deux systèmes dynamiques ergodiques $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, T)$ et $(\Omega', \mathscr{A}', \mu', T')$ sont dits *équivalents au sens de Kakutani* si on peut trouver $A \in \mathscr{A}$ et $A' \in \mathscr{A}'$ tels que les transformations induites T_A et $T'_{A'}$ soient isomorphes. On note alors $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, T) \sim (\Omega', \mathscr{A}', \mu', T')$, ou plus simplement $T \sim T'$.

La formule d'Abramov, qui donne l'entropie d'une transformation induite :

$$h(T_A) \;=\; \frac{1}{\mu(A)} h(T)\,,$$

permet de dire qu'il existe au moins trois classes d'équivalence pour cette relation (entropie nulle, strictement positive finie, et entropie infinie). Mais jusqu'à l'introduction par Feldman en 1976 ([2]) de la notion de système *lâchement Bernoulli*, on ne savait pas si deux systèmes dans la même classe d'entropie étaient toujours équivalents. Feldman montre que la "lâche-Bernoullicité" (dont on donnera plus loin une définition dans le cas de l'entropie nulle) est nécessaire pour qu'un système soit équivalent à une rotation irrationnelle, ou à un décalage de Bernoulli. Il construit aussi des systèmes non lâchement Bernoulli, l'un d'entropie nulle et l'autre d'entropie positive, prouvant ainsi que dans une même classe d'entropie, il existe des systèmes non équivalents au sens de Kakutani.

Un peu plus tard, Ornstein, Rudolph et Weiss ([5]) ont développé toute une théorie de l'équivalence en utilisant la propriété introduite par Feldman. Citons ici quelques résultats essentiels concernant l'induction contenus dans leur travail :

- Si T est lâchement Bernoulli et $h(T) > 0$, les systèmes dynamiques induits par T sont tous les S lâchement Bernoulli et d'entropie $h(S) > h(T)$.
- Si T est lâchement Bernoulli et d'entropie nulle, les systèmes dynamiques induits par T sont tous les S lâchement Bernoulli et d'entropie nulle.
- Si T est lâchement Bernoulli et $h(S) \geq h(T)$, alors il existe $S' \sim S$ tel que T soit un facteur de S'.

On va s'intéresser ici au problème suivant, auquel aucun des résultats cités ci-dessus ne fournit de réponse : étant données deux transformations ergodiques S et T, est-il toujours possible de trouver une transformation $S' \sim S$ telle que T soit *spectralement* isomorphe à un facteur de S' ?

La lâche-Bernoullicité étant conservée par passage au facteur, il suffit pour répondre négativement à cette question de construire une transformation T qui n'est jamais spectralement isomorphe à un système lâchement Bernoulli.

On va montrer en fait qu'il existe une mesure finie continue sur $[-\pi, \pi]$ qui ne peut pas être la mesure spectrale d'un $f \in L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mu, T)$ si T est lâchement Bernoulli. En conséquence, une telle mesure ne peut pas être obtenue comme mesure spectrale dans le cadre d'une transformation induite par une rotation irrationnelle.

L'argument essentiel pour arriver au résultat voulu tient dans le théorème de Foias et Stratila ([3]), qui affirme que si T est ergodique, et si la mesure spectrale σ_f d'un $f \in L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mu, T)$

est symétrique et concentrée sur $K \cup (-K)$ où K est un ensemble de Kronecker, alors le facteur engendré par f est métriquement déterminé : c'est le gaussien-Kronecker de mesure spectrale σ_f. (Voir les définitions données en 1.3.) Il reste alors à construire un gaussien-Kronecker qui n'est pas lâchement Bernoulli.

1.2 Transformations lâchement Bernoulli d'entropie nulle

Un *mot* de longueur l sur un "alphabet" $\mathscr{U}$ est une suite finie $W = (u_1, \dots, u_l)$ d'éléments de l'ensemble $\mathscr{U}$; on notera aussi $W = u_1 \dots u_l$. Un *sous-mot* de W est un mot de la forme $W' = u_k u_{k+1} \dots u_{k+r}$ avec $1 \leq k \leq k + r \leq l$. Une *sous- suite* de W est un mot de la forme $W'' = u_{j_1} \dots u_{j_s}$ avec $1 \leq j_1 < \cdots < j_s \leq l$.

Soit $\mathscr{P} = \{P_u,\ u \in \mathscr{U}\}$ une partition finie de Ω, les P_u appartenant bien sûr à la tribu $\mathscr{A}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $\mathscr{P}(\omega) \overset{\text{déf}}{=} u$ si $\omega \in P_u$, et pour tout couple d'entiers (i, j) avec $i < j$, on définit sur l'alphabet $\mathscr{U}$ le mot

$$W|_i^j (\omega, T, \mathscr{P}) \overset{\text{déf}}{=} u_i u_{i+1} \dots u_{j-1},$$

où pour tout $k \in \{i, \dots, j-1\}$, $u_k \overset{\text{déf}}{=} \mathscr{P}(T^k\omega)$.

Soient $W = u_1 \dots u_l$ et $W' = u'_1 \dots u'_l$ deux mots de même longueur l sur un alphabet $\mathscr{U}$. On définit entre ces deux mots la distance $\overline{d}$ par

$$\overline{d}\,(W, W') \overset{\text{déf}}{=} \frac{r}{l},$$

où r est le nombre d'indices $k \in \{1, \dots, l\}$ tels que $u_k \neq u'_k$. On définit également la distance $\overline{f}$ entre W et W' par

$$\overline{f}\,(W, W') \overset{\text{déf}}{=} \frac{l - s}{l},$$

où s est la longueur de la plus grande sous-suite commune aux mots W et W'. Clairement, la distance $\overline{f}$ est toujours inférieure ou égale à la distance $\overline{d}$.

On peut étendre la définition de $\overline{f}$ au cas où W et W' sont de longueurs respectives l et l' différentes. On pose alors

$$\overline{f}\,(W, W') \overset{\text{déf}}{=} \frac{l + l' - 2s}{l + l'},$$

où s est défini comme précédemment.

La distance $\overline{f}$ fut introduite par Feldman pour définir la notion de lâche-Bernoullicité d'un système dynamique. On ne va pas donner ici la définition générale de cette propriété, mais simplement l'énoncer dans le cas où T est d'entropie nulle.

> Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, T)$ un système dynamique d'entropie nulle. Il est dit *lâchement Bernoulli* si pour toute partition finie $\mathscr{P}$ de Ω et tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout entier $l \geq N$, on puisse trouver une partie M de Ω (dépendant de $\mathscr{P}$, l et ε), de mesure $\mu(M) \leq \varepsilon$, en dehors de laquelle on ait pour tous ω et ω'
>
> $$\overline{f}\left(W|_0^l (\omega, T, \mathscr{P}), W|_0^l (\omega', T, \mathscr{P})\right) \leq \varepsilon.$$

Remarque : dans cette définition, on peut remplacer "*il existe un entier N tel que, pour tout entier $l \geq N$...*" par "*pour tout entier N, il existe $l \geq N$ tel que...*".

1.3 Systèmes dynamiques gaussiens et "gaussiens-Kronecker"

Soit γ une mesure finie symétrique sur $[-\pi, \pi[$. Le système dynamique $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, T)$ est appelé *système dynamique gaussien de mesure spectrale* γ si il existe un processus gaussien réel centré $(X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ vérifiant :

- pour tout entier p, $X_p = X_0 \circ T^p$,
- la plus petite tribu rendant les X_p mesurables est $\mathscr{A}$,
- pour tous p et q, $\mathbb{E}[X_p X_q] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(q-p)t}\, d\gamma(t)$.

La donnée de γ détermine toutes les propriétés d'un tel système. En particulier, T est ergodique si et seulement si γ est diffuse, et dans ce cas T est même faiblement mélangeante (voir [1]). L'entropie de T ne peut valoir que 0 ou $+\infty$, suivant respectivement que γ est ou n'est pas singulière par rapport à la mesure de Lebesgue (voir [7]).

On note S^1 l'ensemble des complexes de module 1. Rappelons qu'une partie K de $[-\pi, \pi[$ est un *ensemble de Kronecker* si, pour toute fonction continue $f : K \longrightarrow S^1$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier h tel que

$$\sup_{x\in K} \left| f(x) - e^{ihx} \right| \le \varepsilon.$$

Dans le cas où γ est diffuse et concentrée sur $K \cup (-K)$, où K est un ensemble de Kronecker dans $[0, \pi]$, on dit que le système dynamique gaussien de mesure spectrale γ est un *gaussien-Kronecker*. Notons qu'un ensemble de Kronecker est toujours de mesure de Lebesgue nulle ; par conséquent, un gaussien-Kronecker est toujours d'entropie nulle. Comme on l'a déjà dit, l'intérêt principal suscité par la classe des gaussiens-Kronecker réside dans leur étonnante stabilité spectrale, propriété partagée avec les systèmes à spectre discret qui sont, eux, tous lâchement Bernoulli.

On sait déjà que certains gaussiens-Kronecker sont lâchement Bernoulli, et que l'on peut aussi trouver un système dynamique gaussien non lâchement Bernoulli(voir [9]). La construction du gaussien-Kronecker non lâchement Bernoulli qui va suivre s'inspire d'ailleurs largement de celle effectuée dans ce travail, qui elle même reprenait une idée de Rothstein ([6]).

1.4 Transformations de la trajectoire brownienne

On utilisera dans la suite la représentation d'un système dynamique gaussien comme une transformation géométrique de la trajectoire brownienne complexe, développée dans [8]. On désignera donc par $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ l'espace canonique du mouvement brownien complexe issu de 0, sur l'intervalle de temps [0,1] :

- Ω est l'espace des applications continues de [0,1] dans $\mathbb{C}$, qui s'annulent en $t = 0$,
- la probabilité μ est la mesure de Wiener sur Ω,
- $\mathscr{A}$ est la tribu borélienne, complétée pour μ.

Pour $\omega \in \Omega$, et $0 \le t \le 1$, on note $B_t(\omega)$ la position de la trajectoire ω à l'instant t.

Si σ est une mesure de probabilité sur $[0, 2\pi]$ concentrée en un nombre fini de points $\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$, de masses respectives $m_1, \ldots, m_p$, on définit une transformation T_σ de Ω, préservant la mesure μ, de la façon suivante : posons, pour tout $k \in \{1,\dots,p\}$, $t_k \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{k} m_j$ et $t_0 \stackrel{\text{déf}}{=} 0$; on découpe la trajectoire ω en p morceaux, correspondant aux intervalles de temps $[t_{k-1}, t_k]$ $(1 \leq k \leq p)$, puis on effectue une rotation de l'angle α_k sur le k-ième morceau. $T_\sigma\,\omega$ est la trajectoire obtenue en recollant bout à bout les nouveaux morceaux. On a ainsi, pour $t \in [t_j, t_{j+1}]$,

$$B_t \circ T_\sigma \;=\; \sum_{k=1}^{j} e^{i\alpha_k}\left(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right) + e^{i\alpha_{j+1}}\left(B_t - B_{t_j}\right). \tag{1}$$

Si σ est maintenant une mesure de probabilité diffuse sur $[0, 2\pi]$, on peut définir T_σ comme la limite d'une suite transformations T_{σ_n}, où les mesures σ_n sont concentrées en un nombre fini de points et convergent suffisamment bien vers σ. Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} B_t \circ T_\sigma^p \;&=\; \int_0^t e^{ip\psi(s)}\, dB_s, \\ \text{où} \quad \psi(s) \;&\stackrel{\text{déf}}{=}\; \inf\left\{x \in [0,\pi] \;/\; \sigma\left([0,x]\right) \geq s\right\}. \end{aligned}$$

Si σ est de plus concentrée sur $[0,\pi]$, $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, T_\sigma)$ est alors un système dynamique gaussien de mesure spectrale γ, où γ est la mesure de probabilité symétrique sur $[-\pi, \pi]$ définie par

$$\gamma(A) \;\stackrel{\text{déf}}{=}\; \frac{1}{2}\Big(\sigma\big(A \cap [0,\pi]\big) + \sigma\big(-A \cap [0,\pi]\big)\Big), \tag{2}$$

le processus gaussien réel sous-jacent étant donné par $X_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \Re e\,(B_1)$. On a aussi dans ce cas $T_\sigma^2 = T_{\tilde{\sigma}}$, où $\tilde{\sigma}$ est la mesure sur $[0, 2\pi]$ image de σ par $t \longmapsto 2t$.

En corollaire, si σ est diffuse sur $[0, 2\pi]$, T_σ est ergodique (même faiblement mélangeante), et si de plus σ est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, T_σ est d'entropie nulle.

On aura aussi besoin du lemme suivant, utilisé et démontré dans [9].

Lemme 1 *Fixons une partition finie $\mathscr{P} = \{P_u,\ u \in \mathscr{U}\}$ de Ω. Soit σ_0 une mesure de probabilité sur $]0, 2\pi[$, concentrée en p points $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}$, chacun de masse $1/p$, et soit l un entier supérieur ou égal à 1. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute mesure de probabilité σ vérifiant*

$$\forall k \in \{0, \dots, p-1\},\ \sigma\big(]\alpha_k - \delta, \alpha_k + \delta[\big) = \frac{1}{p}, \tag{3}$$

on ait

$$\mu\left(W|_0^l(\omega, T_\sigma, \mathscr{P}) \neq W|_0^l(\omega, T_{\sigma_0}, \mathscr{P})\right) \;\leq\; \varepsilon.$$

2 Construction d'un gaussien-Kronecker

2.1 Construction d'un ensemble de Kronecker dans $[0, 2\pi]$

La première étape de la construction consiste à choisir un entier $m_1 \geq 2$, et à définir les m_1 points de $[0, 2\pi]$

$$\alpha_k^1 \;\stackrel{\text{déf}}{=}\; \frac{2k\pi}{m_1} \quad (0 \leq k \leq m_1 - 1).$$

On pose $p_1 \stackrel{\text{déf}}{=} m_1$ (en général, p_n est le nombre de points définis à l'étape n), et $l_1 \stackrel{\text{déf}}{=} m_1$ (en général, l_n est un entier tel que les p_n points définis à l'étape n soient tous de la forme $2j\pi/l_n$, avec j entier).

À l'étape n, on a donc défini p_n points $\alpha_k^n = 2j_k^n\pi/l_n$ $(0 \leq k \leq p_n - 1)$. On choisit alors des entiers $q_0^n, \ldots, q_{p_n-1}^n$ qui sont premiers, deux à deux distincts, et tous supérieurs à n. On pose

$$q_{n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} q_0^n \ldots q_{p_n-1}^n.$$

Puis, on choisit un entier $k_{n+1} \geq n+1$, et on pose pour $0 \leq k \leq p_n - 1$

$$J_k^n \stackrel{\text{déf}}{=} \left[\alpha_k^n\,,\,\alpha_k^n + \frac{2\pi}{l_n k_{n+1}}\right].$$

Enfin, on choisit un entier $m_{n+1} \geq 2$. Dans chaque intervalle J_k^n, on définit alors m_{n+1} points en posant pour $0 \leq k \leq p_n - 1$ et $0 \leq s \leq m_{n+1} - 1$

$$\alpha_{km_{n+1}+s}^{n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} \alpha_k^n + \frac{2\pi}{l_n k_{n+1} m_{n+1}} \left(s + \frac{1}{q_k^n}\right). \tag{4}$$

Le nombre de points de l'étape $n+1$ vaut donc

$$p_{n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} p_n m_{n+1},$$

et tous ces points sont de la forme $2j\pi/l_{n+1}$ avec

$$l_{n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} l_n k_{n+1} m_{n+1} q_{n+1}.$$

Proposition 2 *Sous les hypothèses précédentes, l'ensemble*

$$K \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k=0}^{p_n-1} J_k^n$$

est un ensemble de Kronecker.

Preuve — Il s'agit de montrer que pour toute fonction continue $f : K \longrightarrow S^1$, la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists h \in \mathbb{Z},\ \sup_{x\in K} \left| f(x) - e^{ihx} \right| \leq \varepsilon. \tag{5}$$

Fixons un entier $n \geq 1$ et considérons le cas où f est constante sur chaque intervalle J_k^n. Notons z_k, pour $0 \leq k \leq p_n - 1$, la valeur de f sur J_k^n. Il existe alors un entier $j_k \in \{0, \ldots, q_k^n - 1\}$ tel que

$$\left| e^{i2\pi j_k/q_k^n} - z_k \right| \leq \frac{2\pi}{q_k^n} \leq \frac{2\pi}{n}.$$

Puis, les entiers $q_0^n, \ldots, q_{p_n-1}^n$ étant premiers et deux à deux distincts, il existe un entier $j \in \{0, \ldots, q_{n+1} - 1\}$ tel que

$$\forall k \in \{0, \ldots, p_n - 1\},\ e^{i2\pi j_k/q_k^n} = e^{i2\pi j/q_k^n}.$$

Posons alors

$$h \stackrel{\text{déf}}{=} l_n k_{n+1} m_{n+1} j.$$

Prenons maintenant $x \in K$, soit k tel que $x \in J_k^n$, et k' tel que $x \in J_{k'}^{n+1}$. On vérifie facilement que

$$e^{ih\alpha_{k'}^{n+1}} \;=\; e^{i2\pi j/q_k^n} \;=\; e^{i2\pi j_k/q_k^n},$$

et donc

$$\left|e^{ih\alpha_{k'}^{n+1}} - f(x)\right| \;=\; \left|e^{i2\pi j_k/q_k^n} - z_k\right| \;\leq\; 2\pi/n.$$

Puis, comme $\left|x - \alpha_{k'}^{n+1}\right| \leq 2\pi/(l_{n+1}k_{n+2}) \leq 2\pi/(n\, l_{n+1})$, et $h \leq l_{n+1}$, on a

$$\left|e^{ih\alpha_{k'}^{n+1}} - e^{ihx}\right| \;\leq\; \frac{2\pi h}{n\, l_{n+1}} \;\leq\; \frac{2\pi}{n}.$$

Ainsi, on a trouvé $h \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $x \in K$,

$$\left|e^{ihx} - f(x)\right| \;\leq\; \frac{4\pi}{n}.$$

Comme f est aussi constante sur les intervalles J_k^m avec $m \geq n$, on en déduit facilement qu'une telle fonction vérifie la propriété (5).

Enfin, il est clair que chaque fonction continue $f : K \longrightarrow S^1$ peut être approchée uniformément sur K par une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$, où pour tout n, f_n est constante sur chaque intervalle J_k^n. On vérifie alors la propriété (5) pour toutes les fonctions continues de K dans S^1. $\square$

2.2 Un gaussien-Kronecker non lâchement Bernoulli

Dans la construction effectuée précédemment, on définit à l'étape n la mesure de probabilité atomique σ_n, qui donne à chaque point α_k^n la masse $1/p_n$. On appelle σ la probabilité sur $[0, 2\pi]$ définie par

$$\forall n \geq 1,\ \forall k \in \{0, \ldots, p_n - 1\},\ \sigma(J_k^n) \;\overset{\text{déf}}{=}\; \frac{1}{p_n}.$$

Pour simplifier les notations, on notera désormais T_n au lieu de T_{σ_n}, et T au lieu de T_σ. Notons que, puisque les points α_k^n vérifient $l_n\alpha_k^n \equiv 0\ [2\pi]$, on a pour tout $n \geq 1$

$$T_n^{l_n} \;=\; \mathrm{Id}_\Omega.$$

La suite de ce travail sera consacrée à montrer le résultat suivant.

Théorème 3 *Il est possible dans la construction précédente de choisir l'entier m_1, puis à chaque étape les entiers k_{n+1} et m_{n+1}, de telle sorte que le système dynamique $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, T)$ ne soit pas lâchement Bernoulli.*

Corollaire 4 *Il existe un système dynamique gaussien-Kronecker non lâchement Bernoulli.*

En effet, notons $\tilde{\sigma}$ la probabilité sur $[0, \pi]$ image de σ par $t \mapsto t/2$. Le support K de σ étant un Kronecker, $\tilde{\sigma}$ est aussi concentrée sur un Kronecker, et donc $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, T_{\tilde{\sigma}})$ est un gaussien-Kronecker. Mais $T_{\tilde{\sigma}}^2 = T$ n'est pas lâchement Bernoulli, donc $T_{\tilde{\sigma}}$ n'est pas non plus lâchement Bernoulli.

3 Preuve de la non lâche-Bernoullicité

3.1 Indépendance

On va commencer par formuler quelques remarques, qui aideront à mieux comprendre le comportement des transformations T_n, et qui constitueront un argument essentiel pour la démonstration du théorème 3.

Proposition 5 *Soit ν une probabilité sur $[0, 2\pi]$. On suppose qu'il existe un entier $m > 1$ tel que ν soit invariante par la translation $x \mapsto x + 2\pi/m$ $[2\pi]$. Alors les m variables aléatoires $B_1, B_1 \circ T_\nu, \dots, B_1 \circ T_\nu^{m-1}$ sont indépendantes.*

Preuve — Par construction de la transformation T_ν, on a pour tous j, k dans $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[B_1 \circ T_\nu^j \, \overline{B_1 \circ T_\nu^k}\right] &= 2 \int_{[0,2\pi]} e^{i(j-k)x} d\nu(x) \\ &= \frac{2}{m} \int_{[0,2\pi]} e^{i(j-k)x} \left(\sum_{r=0}^{m-1} e^{ir(j-k)/m} \right) d\nu(x) \\ &= 0 \quad \text{si } (j-k) \text{ n'est pas divisible par } m. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de rappeler que dans le sous-espace gaussien $\mathscr{H}$ de $L^2(\mu)$ engendré par les variables B_t, $0 \le t \le 1$, dans lequel se trouvent tous les $B_1 \circ T_\nu^j$, l'orthogonalité équivaut à l'indépendance. □

La mesure σ_1 étant invariante par $x \mapsto x + 2\pi/m_1$ $[2\pi]$, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 6 *Les m_1 variables aléatoires $B_1, B_1 \circ T_{\sigma_1}, \dots, B_1 \circ T_{\sigma_1}^{m_1-1}$ sont indépendantes.*

Puis, pour $n \ge 1$ et $0 \le k \le p_n - 1$, notons

$$A_k^n \stackrel{\text{déf}}{=} B_{(k+1)/p_n} - B_{k/p_n},$$

et soit $\mathscr{A}_n$ la tribu engendrée par les A_k^n, $0 \le k \le p_n - 1$. On a par définition de T_n, pour tout entier j,

$$A_k^n \circ T_n^j = e^{ij\alpha_k^n} A_k^n,$$

et donc $B_1 \circ T_n^j = \sum_{k=0}^{p_n-1} e^{ij\alpha_k^n} A_k^n$ est toujours $\mathscr{A}_n$-mesurable.

Proposition 7 *Pour tout entier $n \ge 1$, les m_{n+1} tribus*

$$\mathscr{A}_n, T_{n+1}^{-k_{n+1}l_n} \mathscr{A}_n, \dots, T_{n+1}^{-(m_{n+1}-1)k_{n+1}l_n} \mathscr{A}_n$$

sont indépendantes.

Preuve — Si $I = [a, b[$ est un sous-intervalle de $[0, 1]$, notons $\mathscr{H}_I$ le sous-espace gaussien de $\mathscr{H}$ engendré par les variables $B_t - B_a$, $a \le t \le b$. Les propriétés du mouvement brownien entraînent que si $I \cap J = \emptyset$, alors les espaces $\mathscr{H}_I$ et $\mathscr{H}_J$ sont orthogonaux. Or, pour $0 \le k \le p_n - 1$, on a pour tout entier j

$$A_k^n \circ T_{n+1}^j \in \mathscr{H}_{[k/p_n,(k+1)/p_n[},$$

et donc les p_n processus

$$\left(A_0^n \circ T_{n+1}^j\right)_{j\in\mathbb{Z}}, \ldots, \left(A_{p_n-1}^n \circ T_{n+1}^j\right)_{j\in\mathbb{Z}}$$

sont indépendants. Il suffit donc de voir que, à k fixé, les m_{n+1} variables

$$A_k^n, A_k^n \circ T_{n+1}^{k_{n+1}l_n}, \ldots, A_k^n \circ T_{n+1}^{(m_{n+1}-1)k_{n+1}l_n}$$

sont indépendantes. Or, $T_{n+1}^{k_{n+1}l_n}$ agit sur l'espace $\mathscr{H}_{[k/p_n,(k+1)/p_n[}$ comme $T_{\nu_k^n}$ sur $\mathscr{H}$, où ν_k^n est la mesure de probabilité atomique sur $[0, 2\pi[$ définie par

$$\forall r \in \{0, \ldots, m_{n+1}-1\}, \quad \nu_k^n\left(\left\{\frac{2\pi}{m_{n+1}}\left(r+\frac{1}{q_k^n}\right)\right\}\right) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{m_{n+1}}.$$

Comme ν_k^n est invariante par la translation $x \mapsto x + 2\pi/m_{n+1}$, la proposition 5 donne le résultat voulu. □

3.2 Mise en place de la récurrence

On se fixe une partition $\mathscr{P} = \{P_1, \ldots, P_{100}\}$ de Ω, qui servira à nier la définition de lâche Bernoullicité. Cette partition est définie par

$$P_k \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{\omega \in \Omega \Big/ \arg\Big(B_1(\omega)\Big) \in \left[\frac{2(k-1)\pi}{100}, \frac{2k\pi}{100}\right[\right\},$$

en prenant bien sûr la détermination de l'argument comprise entre 0 et 2π. On notera alors pour simplifier

$$W|_i^j(\omega, T) \stackrel{\text{déf}}{=} W|_i^j(\omega, T, \mathscr{P}).$$

On se fixe aussi une suite $(\delta_n)_{n\geq 1}$ de réels dans $]0, 1/3[$, strictement décroissante, et de limite non nulle. On pose, pour tout $n \geq 1$

$$\varepsilon_{n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\delta_n - \delta_{n+1}}{100}.$$

On choisit aussi, pour tout $n \geq 1$, un entier $b_{n+1} > 100/\varepsilon_{n+1}$.

Le but de ce qui suit est de montrer que l'on peut choisir l'entier m_1, puis à chaque étape les entiers m_{n+1} et k_{n+1}, de telle sorte que pour tout $n \geq 1$, la propriété $\mathscr{H}_n$ énoncée ci-après soit vérifiée, ce qui permettra de voir que la transformation $T = T_\sigma$ obtenue à la fin n'est pas lâchement Bernoulli.

($\mathscr{H}_n$) — *Il existe un "mauvais" ensemble M_n, $\mathscr{A}_n$-mesurable, stable par T_n, dont la mesure vérifie*

$$\mu(M_n) < \frac{\varepsilon_{n+1}}{100};$$

pour tout $\omega_0 \in \Omega \setminus M_n$, et tout entier $l \geq 1$, on a

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega \setminus M_n \Big/ \overline{f}\left(W|_0^{l_n}(\omega, T_n), W|_0^{l}(\omega_0, T_n)\right) \leq \delta_n\right\}\right) < \eta_n(l_n), \tag{6}$$

$$\text{où} \quad \eta_n(l) \stackrel{\text{déf}}{=} \left(16\, l^2\, 2^{90\sqrt{l/\varepsilon_{n+1}}}\right)^{-9/\varepsilon_{n+1}}.$$

Commençons par montrer que, si m_1 est choisi assez grand, $\mathscr{H}_1$ est vérifiée. Grâce au corollaire 6, on sait que pour chaque mot W de longueur $l_1 = m_1$ sur l'alphabet $\mathscr{U} \stackrel{\text{déf}}{=} \{1, \ldots, 100\}$, on a

$$\mu\left(W|_0^{l_1}(\omega, T_1) = W\right) \; = \; 100^{-l_1}.$$

Fixons un entier $l \geq 1$, un point $\omega_0 \in \Omega$, et estimons le nombre de mots $W \in \mathscr{U}^{l_1}$ tels que

$$\overline{f}\left(W, W|_0^l(\omega_0, T_1)\right) \; \leq \; \delta_1. \tag{7}$$

Puisque $\delta_1 < 1/3$, il est nécessaire pour que l'inégalité (7) soit vérifiée d'avoir

$$\frac{l_1}{2} \; < \; l \; < \; 2\,l_1,$$

et que W ait en commun avec $W|_0^l(\omega_0, T_1)$ une sous-suite de longueur au moins $l_1/2$. Le nombre de mots $W \in \mathscr{U}^{l_1}$ vérifiant (7) est donc majoré par

$$\mathrm{C}_l^{[l_1/2]+1}\,\mathrm{C}_{l_1}^{[l_1/2]+1}\,100^{l_1/2},$$

donc par $2^{2l_1}\,2^{l_1}\,10^{l_1} = 80^{l_1}$. On en déduit

$$\mu\left(\overline{f}\left(W|_0^{l_1}(\omega, T_1), W|_0^l(\omega_0, T_1)\right) \leq \delta_1\right) \; < \; \left(\frac{80}{100}\right)^{l_1} \; = \; \left(\frac{4}{5}\right)^{m_1}.$$

Or, si m_1 est assez grand, on a clairement $(4/5)^{m_1} < \eta_1(m_1)$, et donc $\mathscr{H}_1$ est vérifiée avec $M_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \emptyset$.

On suppose maintenant que la construction a pu être réalisée jusqu'au rang $n \geq 1$, de telle sorte que pour tout entier $p \in \{1, \ldots, n\}$, la propriété $\mathscr{H}_p$ soit vérifiée. On suppose aussi choisis les entiers q_k^n, $0 \leq k \leq p_n - 1$, et donc le produit $q_{n+1} = q_0^n \ldots q_{p_n-1}^n$ est fixé. On va voir alors comment choisir les entiers k_{n+1} et m_{n+1} pour que $\mathscr{H}_{n+1}$ soit aussi vérifiée.

3.3 Approximations des T_{n+1}-mots par des concaténations de T_n-mots

Grâce au lemme 1, on sait qu'il est possible de choisir k_{n+1} assez grand pour que, pour toute mesure de probabilité ν vérifiant

$$\forall k \in \{0, \ldots, p_n - 1\}, \quad \nu\left(\left[\alpha_k^n, \alpha_k^n + \frac{2\pi}{k_{n+1}l_n}\right]\right) \; = \; \frac{1}{p_n}, \tag{8}$$

on ait

$$\mu\left(W|_0^{b_{n+1}l_n}(\omega, T_n) \neq W|_0^{b_{n+1}l_n}(\omega, T_\nu)\right) \; < \; \frac{\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}}{400\,l_n b_{n+1}}. \tag{9}$$

On choisit de plus k_{n+1} multiple de b_{n+1}, et on pose $k_{n+1} = k'_{n+1}b_{n+1}$.

On va maintenant, pour tout $\omega \in \Omega$, modifier le mot $W|_0^{l_{n+1}}(\omega, T_n)$ de la façon suivante : pour tout $j \in \{0, \ldots, k'_{n+1}m_{n+1}q_{n+1} - 1\}$, on remplace le sous-mot $W|_{jb_{n+1}l_n}^{(j+1)b_{n+1}l_n}(\omega, T_{n+1}) = W|_0^{b_{n+1}l_n}\left(T_{n+1}^{jb_{n+1}l_n}\omega, T_{n+1}\right)$ par le T_n-mot $W|_0^{b_{n+1}l_n}\left(T_{n+1}^{jb_{n+1}l_n}\omega, T_n\right)$, et on note $W_n(\omega, l_{n+1})$

la concaténation des T_n-mots ainsi obtenue. Par choix de k_{n+1}, on a par (9), pour tout entier $j \in \{0,\ldots,k'_{n+1}m_{n+1}q_{n+1}-1\}$

$$\mathbb{E}\left[\overline{d}\left(W|_0^{b_{n+1}l_n}\left(T_{n+1}^{jb_{n+1}l_n}\omega, T_{n+1}\right), W|_0^{b_{n+1}l_n}\left(T_{n+1}^{jb_{n+1}l_n}\omega, T_n\right)\right)\right] \;<\; \frac{\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}}{400\, l_n b_{n+1}},$$

d'où

$$\mathbb{E}\left[\overline{d}\left(W|_0^{l_{n+1}}(\omega, T_{n+1}), W_n(\omega, l_{n+1})\right)\right] \;<\; \frac{\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}}{400\, l_n b_{n+1}}.$$

Par l'inégalité de Tchebychev, on obtient alors $\mu(D) < \varepsilon_{n+2}/200\, l_n b_{n+1}$, où

$$D \overset{\text{déf}}{=} \left\{\omega \in \Omega \;\Big/\; \overline{d}\left(W|_0^{l_{n+1}}(\omega, T_{n+1}), W_n(\omega, l_{n+1})\right) \geq \frac{\varepsilon_{n+1}}{2}\right\}.$$

L'événement D est $\mathscr{A}_{n+1}$-mesurable, puisqu'il n'est défini qu'à partir de l'action des transformations T_n et T_{n+1} sur B_1, et en utilisant la périodicité de T_{n+1}, on voit facilement que D est stable par $T_{n+1}^{l_{n+1}b_{n+1}}$. On pose alors

$$M'_{n+1} \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{j=0}^{b_{n+1}l_n-1} T_{n+1}^{-j}D.$$

La stabilité de M'_{n+1} par T_{n+1} est immédiate, on a $\mu(M'_{n+1}) < \varepsilon_{n+2}/200$, et pour tout $\omega \in \Omega \setminus M'_{n+1}$, on a

$$\overline{d}\left(W|_0^{l_{n+1}}(\omega, T_{n+1}), W_n(\omega, l_{n+1})\right) < \frac{\varepsilon_{n+1}}{2}. \tag{10}$$

3.4 Éviter le mauvais ensemble M_n

Le mauvais ensemble M_n étant supposé $\mathscr{A}_n$-mesurable, la proposition 7 entraîne que les m_{n+1} variables aléatoires

$$\mathbb{1}_{M_n},\ \mathbb{1}_{M_n}\circ T_{n+1}^{k_{n+1}l_n}, \ldots,\ \mathbb{1}_{M_n}\circ T_{n+1}^{(m_{n+1}-1)k_{n+1}l_n}$$

sont indépendantes. On sait aussi que $\mu(M_n) < \varepsilon_{n+1}/100$, et donc on peut choisir m_{n+1} assez grand pour que

$$\mu\left(\frac{1}{m_{n+1}}\sum_{j=0}^{m_{n+1}-1}\mathbb{1}_{M_n}\circ T_{n+1}^{jl_nk_{n+1}} \geq \frac{\varepsilon_{n+1}}{2}\right) \;<\; \frac{\varepsilon_{n+2}}{200 l_n b_{n+1} k'_{n+1} q_{n+1}}.$$

Puisque T_{n+1} préserve la mesure, on a aussi pour $r \in \{0,\ldots,k'_{n+1}-1\}$ et $s \in \{0,\ldots,q_{n+1}-1\}$

$$\mu\left(\frac{1}{m_{n+1}}\sum_{j=0}^{m_{n+1}-1}\mathbb{1}_{M_n}\circ T_{n+1}^{l_nb_{n+1}[r+k'_{n+1}(j+sm_{n+1})]} \geq \frac{\varepsilon_{n+1}}{2}\right) \;<\; \frac{\varepsilon_{n+2}}{200 l_n b_{n+1} k'_{n+1} q_{n+1}}.$$

En écrivant

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k'_{n+1}m_{n+1}q_{n+1}} \sum_{k=0}^{k'_{n+1}m_{n+1}q_{n+1}-1} \mathbb{1}_{M_n}\circ T_{n+1}^{kb_{n+1}l_n} \\
=\;& \frac{1}{q_{n+1}}\sum_{s=0}^{q_{n+1}-1}\frac{1}{k'_{n+1}}\sum_{r=0}^{k'_{n+1}-1}\frac{1}{m_{n+1}}\sum_{j=0}^{m_{n+1}-1}\mathbb{1}_{M_n}\circ T_{n+1}^{l_nb_{n+1}[r+k'_{n+1}(j+sm_{n+1})]},
\end{aligned}$$

on voit alors que l'événement

$$E \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{1}{k'_{n+1} m_{n+1} q_{n+1}} \sum_{k=0}^{k'_{n+1} m_{n+1} q_{n+1} - 1} \mathbb{1}_{M_n} \circ T_{n+1}^{k b_{n+1} l_n} \geq \frac{\varepsilon_{n+1}}{2} \right)$$

vérifie $\mu(E) < \varepsilon_{n+2}/(200 b_{n+1} l_n)$. De plus, toujours par la périodicité de T_{n+1}, E est stable par $T_{n+1}^{b_{n+1} l_n}$. Il reste maintenant à poser

$$M''_{n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{j=0}^{b_{n+1} l_n - 1} T_{n+1}^{j} E,$$

pour obtenir un ensemble $M''_{n+1} \in \mathscr{A}_{n+1}$, stable par T_{n+1}, dont la mesure est strictement inférieure à $\varepsilon_{n+2}/200$, et en dehors duquel on a

$$\sum_{k=0}^{k'_{n+1} m_{n+1} q_{n+1} - 1} \mathbb{1}_{M_n} \circ T_{n+1}^{k b_{n+1} l_n} \;<\; \frac{\varepsilon_{n+1}}{2}. \tag{11}$$

On va maintenant modifier le mot $W_n(\cdot, l_{n+1})$, de sorte à éliminer les éventuels problèmes dus au mauvais ensemble M_n. Cette modification va se faire de deux façons différentes, suivant le rôle joué dans la vérification de $\mathscr{H}_{n+1}$: celui de ω ou celui de ω_0.

Pour $\omega \in \Omega$, et tout $j \in \{0, \ldots, k'_{n+1} m_{n+1} q_{n+1} - 1\}$, si $T_{n+1}^{j l_n b_{n+1}} \omega \in M_n$, on remplace $W|_0^{l_n b_{n+1}} \left(T_{n+1}^{j l_n b_{n+1}} \omega, T_n \right)$ dans $W_n(\omega, l_{n+1})$ par le mot

$$Z(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \underbrace{\omega \ldots \omega}_{l_n b_{n+1} \text{ fois } \text{“}\omega\text{”}}.$$

On note $W'_n(\omega, l_{n+1})$ le nouveau mot ainsi obtenu : c'est un mot sur l'alphabet à 101 lettres $\mathscr{U} \cup \{\omega\}$. On a d'après (11), si $\omega \notin M''_{n+1}$

$$\overline{d}\left(W'_n(\omega, l_{n+1}), W_n(\omega, l_{n+1}) \right) \;<\; \frac{\varepsilon_{n+1}}{2}. \tag{12}$$

Définissons maintenant l'ensemble des *bons T_n-mots*

$$B_n \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ W \in \mathscr{U}^{l_n} \Big/ \exists \omega \in \Omega \setminus M_n,\; W|_0^{l_n}(\omega, T_n) = W \right\}.$$

Pour $\omega_0 \in \Omega$, et tout $j \in \{0, \ldots, k'_{n+1} m_{n+1} q_{n+1} - 1\}$, si $W|_0^{l_n} \left(T_{n+1}^{j l_n b_{n+1}} \omega_0, T_n \right)$ n'est pas dans B_n, on remplace $W|_0^{l_n b_{n+1}} \left(T_{n+1}^{j l_n b_{n+1}} \omega_0, T_n \right)$ dans $W_n(\omega_0, l_{n+1})$ par $Z(\omega_0) = \omega_0 \ldots \omega_0$. On note $W''_n(\omega_0, l_{n+1})$ le nouveau mot ainsi obtenu. Remarquons que le nombre de modifications à faire pour passer de $W_n(\omega_0, l_{n+1})$ à $W''_n(\omega_0, l_{n+1})$ est inférieur ou égal au nombre de modifications pour passer de $W_n(\omega_0, l_{n+1})$ à $W'_n(\omega_0, l_{n+1})$. On a donc aussi, si $\omega_0 \notin M''_{n+1}$

$$\overline{d}\left(W''_n(\omega_0, l_{n+1}), W_n(\omega_0, l_{n+1}) \right) \;<\; \frac{\varepsilon_{n+1}}{2}. \tag{13}$$

On peut maintenant définir le mauvais ensemble de l'étape $n+1$

$$M_{n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} M'_{n+1} \cup M''_{n+1},$$

qui est bien $\mathscr{A}_{n+1}$-mesurable, de mesure $\mu(M_{n+1}) < \varepsilon_{n+1}/100$ et stable par T_{n+1} ; on a d'après (10), (12) et (13), pour tous $\omega, \omega_0 \in \Omega \setminus M_{n+1}$

$$\overline{d}\left(W|_0^{l_{n+1}}(\omega, T_{n+1}), W'_n(\omega, l_{n+1})\right) < \varepsilon_{n+1}, \tag{14}$$

$$\text{et} \qquad \overline{d}\left(W|_0^{l_{n+1}}(\omega_0, T_{n+1}), W''_n(\omega_0, l_{n+1})\right) < \varepsilon_{n+1}. \tag{15}$$

Pour tout entier $l \geq 1$ et tout $\omega_0 \in \Omega$, on définit aussi le mot $W''_n(\omega_0, l)$ en ne gardant que les l premières lettres de $(W''_n(\omega_0, l_{n+1}))^k$, où k est un entier tel que $l \leq k\, l_{n+1}$. On vérifie alors grâce à (15) que si $\omega_0 \notin M_{n+1}$ et $l > l_{n+1}/2$

$$\overline{d}\left(W|_0^{l}(\omega_0, T_{n+1}), W''_n(\omega_0, l)\right) < 2\,\varepsilon_{n+1}. \tag{16}$$

3.5 Les n-blocs

Le mot $W''_n(\omega_0, l_{n+1})$ défini précédemment est la concaténation de $k'_{n+1} m_{n+1} q_{n+1}$ sous-mots de longueur $b_{n+1} l_n$, qui seront dorénavant appelés les *n-blocs* de ω_0. Remarquons qu'un n-bloc de ω_0 est soit de la forme $W^{b_{n+1}}$, avec $W \in B_n$, soit de la forme $\omega_0 \ldots \omega_0$ ($b_{n+1} l_n$ fois la lettre "ω_0").

Par définition de B_n, et d'après l'hypothèse de récurrence $\mathscr{H}_n$, on a pour tout $\omega_0 \in \Omega$, et tout sous-mot V d'un n-bloc de ω_0

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega \setminus M_n \;\middle/\; \overline{f}\left(W|_0^{l_n}(\omega, T_n), V\right) \leq \delta_n\right\}\right) < \eta_n(l_n). \tag{17}$$

En effet, ceci est évident si le n-bloc est $\omega_0 \ldots \omega_0$; sinon, le n-bloc est de la forme $W^{b_{n+1}}$, avec $W \in B_n$, et on montre alors facilement grâce à la stabilité de M_n par T_n que tout sous-mot V de ce n-bloc peut toujours s'écrire $W|_0^l(\omega'_0, T_n)$ avec $\omega'_0 \in \Omega \setminus M_n$. On déduit de (17) que, si on note $U(\omega)$ le mot constitué des l_n premiìres lettres de $W'_n(\omega, l_{n+1})$, alors

$$\mu\left(\left\{\omega \in \Omega \;\middle/\; \overline{f}(U(\omega), V) \leq \delta_n\right\}\right) < \eta_n(l_n). \tag{18}$$

Comme on l'a dit précédemment, il y a $k'_{n+1} m_{n+1} q_{n+1}$ n-blocs en tout ω_0. Cependant, le lemme suivant montre que l'on peut majorer le nombre de n-blocs distincts par un nombre indépendant de k'_{n+1}.

Lemme 8 *Pour $\omega_0 \in \Omega$, notons $d(\omega_0)$ le nombre de fois où, dans $W''_n(\omega_0, l_{n+1})$, un n-bloc est différent du n-bloc qui le suit. On a toujours*

$$d(\omega_0) \leq 100\, l_n q_{n+1} m_{n+1}.$$

Preuve — Pour $0 \leq j \leq k'_{n+1} m_{n+1} q_{n+1} - 1$, notons

$$V_j \stackrel{\text{déf}}{=} W|_0^{l_n}\left(T_{n+1}^{j b_{n+1} l_n} \omega_0, T_n\right).$$

Par construction de $W''_n(\omega_0, l_{n+1})$, et en utilisant $T_n^{l_n} = \mathrm{Id}_{\omega_0}$, on voit facilement que $d(\omega_0)$ est majoré par le nombre d'indices $j \in \{0, \ldots, k'_{n+1} m_{n+1} q_{n+1} - 2\}$ tels que $V_j \neq V_{j+1}$. Pour $r \in \{1, \ldots, l_n\}$, notons $v_{j,r}$ la r-ième lettre de V_j ; il suffit de montrer que le nombre d'indices $j \in \{0, \ldots, k'_{n+1} m_{n+1} q_{n+1} - 2\}$ tels que $v_{j,r} \neq v_{j+1,r}$ est majoré par $100\, q_{n+1} m_{n+1}$. Or, comme

T_n et T_{n+1} commutent, on a $v_{j,r} = \mathscr{P}(S^j\omega'_0)$, avec $S \stackrel{\text{déf}}{=} T_{n+1}^{b_{n+1}l_n}$, et $\omega'_0 \stackrel{\text{déf}}{=} T_n^{r-1}\omega_0$. On écrit alors

$$\begin{aligned}
&B_1 \circ S^j(\omega'_0)\\
&= \sum_{k=0}^{p_n-1}\sum_{s=0}^{m_{n+1}-1} A^{n+1}_{km_{n+1}+s}(\omega'_0)\exp\left(ib_{n+1}l_n\alpha^{n+1}_{km_{n+1}+s}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{p_n-1}\sum_{s=0}^{m_{n+1}-1} A^{n+1}_{km_{n+1}+s}(\omega'_0)\exp\left(i\frac{2\pi j}{k'_{n+1}m_{n+1}q_{n+1}}\left(sq_{n+1}+\frac{q_{n+1}}{q_k^n}\right)\right)\\
&= P\left(\exp\left(i\frac{2\pi j}{k'_{n+1}m_{n+1}q_{n+1}}\right)\right),
\end{aligned}$$

où P est le polynôme défini par

$$P(X) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{p_n-1}\sum_{s=0}^{m_{n+1}-1} A^{n+1}_{km_{n+1}+s}(\omega'_0)X^{sq_{n+1}+q_{n+1}/q_k^n}.$$

Le nombre d'indices $j \in \{0,\ldots,k'_{n+1}m_{n+1}q_{n+1}-2\}$ tels que

$$\mathscr{P}(S^j\omega'_0) \neq \mathscr{P}(S^{j+1}\omega'_0)$$

est donc majoré par le nombre de réels $\theta \in [0,2\pi[$ tels que $P(e^{i\theta})$ appartienne à l'une des 50 droites d'équations

$$\arg(z) \equiv \frac{2k\pi}{100}\ [\pi] \quad (0 \le k \le 49).$$

Comme P est de degré inférieur à $q_{n+1}m_{n+1}$, on obtient le résultat voulu en utilisant le lemme qui suit, dont une démonstration est donnée dans [9].

Lemme 9 *Soit P un polynôme de degré $m \ge 1$, à coefficients complexes, et soit $\mathscr{D}$ une droite du plan complexe passant par l'origine. Alors le nombre de réels $\theta \in [0,2\pi[$ qui vérifient $P(e^{i\theta}) \in \mathscr{D}$ est majoré par $2m$.*

3.6 Deux lemmes utiles

Le lemme qui suit sera utilisé plusieurs fois pour la vérification de $\mathscr{H}_{n+1}$.

Lemme 10 *Soit $W = W_1\ldots W_q$ un mot de longueur ql, chaque W_i étant de longueur l, et soit V un mot sur le même alphabet. Alors on peut toujours écrire $V = V_1\ldots V_q$, de telle façon que*

$$\overline{f}(V,W) = \sum_{i=1}^{q}\frac{|V_i|+|W_i|}{|V|+|W|}\overline{f}(V_i,W_i).$$

Si on suppose de plus $\overline{f}(V,W) < \delta < \delta+\varepsilon < 1/3$, où δ et ε sont des réels donnés, alors le nombre d'indices i vérifiant $\overline{f}(V_i,W_i) < \delta+\varepsilon$ vaut au moins $\varepsilon q/9$.

Preuve — Appelons s la longueur de la plus grande sous-suite commune à V et W. On peut facilement trouver un découpage de V sous la forme $V = V_1\ldots V_q$ de telle façon que, si on désigne par s_i la longueur de la plus grande sous-suite commune à V_i et W_i, on ait $s = \sum_{1\leq i\leq q} s_i$. On a alors

$$\begin{aligned}\overline{f}\,(V,W) &= \frac{|V|+|W|-2s}{|V|+|W|}\\ &= \frac{\sum_{1\leq i\leq q}(|V_i|+|W_i|-2s_i)}{|V|+|W|}\\ &= \sum_{i=1}^{q}\frac{|V_i|+|W_i|}{|V|+|W|}\,\overline{f}\,(V_i,W_i)\,.\end{aligned}$$

Posons maintenant, pour $1 \leq i \leq q$,

$$t_i \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{|V_i|+|W_i|}{|V|+|W|}\,,$$

et soit B l'ensemble des indices $i \in \{1,\ldots,q\}$ tels que $\overline{f}\,(V_i,W_i) < \delta+\varepsilon$. On a

$$\sum_{i\notin B} t_i(\delta+\varepsilon) \;\leq\; \sum_{i=1}^{q} t_i\,\overline{f}\,(V_i,W_i) \;<\; \delta,$$

d'où

$$\sum_{i\in B} t_i \;=\; 1-\sum_{i\notin B} t_i \;>\; 1-\frac{\delta}{\delta+\varepsilon}.$$

Par ailleurs, puisque $\delta+\varepsilon < 1/3$, pour tout $i \in B$ on a forcément $|V_i| < 2l$, et donc $t_i < 3l/(ql) = 3/q$. On en déduit

$$\frac{3}{q}\#B \;>\; \frac{\varepsilon}{\delta+\varepsilon} \;>\; \frac{\varepsilon}{3}\,,$$

d'où le résultat annoncé. □

On aura également besoin du lemme combinatoire suivant, dont une démonstration se trouve dans [9], utilisant elle-même un résultat de [6].

Lemme 11 *Soient $0 < c \leq n$ deux entiers. Le nombre d'applications croissantes de $\{1,\ldots,c\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$ est majoré par $c\,2^c\,2^{3\sqrt{nc}}$.*

3.7 Vérification de $\mathscr{H}_{n+1}$

Fixons $\omega_0 \in \Omega\setminus M_{n+1}$, et un entier $l \geq 1$. On veut maintenant majorer la probabilité de l'événement

$$A(\omega_0,l) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{\omega\in\Omega\setminus M_{n+1} \Big/ \overline{f}\left(W|_0^{l_{n+1}}(\omega,T_{n+1}),\, W|_0^{l}(\omega_0,T_{n+1})\right) \leq \delta_{n+1}\right\}.$$

Puisque $\delta_{n+1} < 1/3$, on sait déjà que $A(\omega_0,l)=\emptyset$ si $l \leq l_{n+1}/2$ ou si $l \geq 2\,l_{n+1}$. On suppose donc maintenant $l_{n+1}/2 < l < 2\,l_{n+1}$.

Soit $\omega \in A(\omega_0,l)$. Ni ω ni ω_0 n'étant dans M_{n+1}, on a par (14) et (16)

$$\overline{f}\,(W_n'(\omega,l_{n+1}), W_n''(\omega_0,l)) \;<\; \delta_{n+1}+3\,\varepsilon_{n+1}.$$

Écrivons $W'_n(\omega, l_{n+1})$ sous la forme $W_1 \dots W_{q_{n+1}}$, où chaque W_i est de longueur $l_n k_{n+1} m_{n+1}$. D'après le lemme 10, on peut décomposer $W''_n(\omega_0, l)$ sous la forme $V_1 \dots V_{q_{n+1}}$, avec

$$\overline{f}\left(W'_n(\omega, l_{n+1}), W''_n(\omega_0, l)\right) = \sum_{i=1}^{q_{n+1}} \frac{|V_i| + |W_i|}{l + l_{n+1}} \overline{f}(V_i, W_i),$$

et on sait qu'il existe au moins $\varepsilon_{n+1} q_{n+1}/9$ indices $i \in \{1, \dots, q_{n+1}\}$ tels que

$$\overline{f}(V_i, W_i) < \delta_{n+1} + 4\,\varepsilon_{n+1}. \tag{19}$$

Les indices i qui vérifient (19) seront appelés *bons indices.* On dira aussi qu'un sous-mot V de $W''_n(\omega_0, l)$ est *bien placé* si $|V|$ est un multiple de $l_n k'_{n+1} m_{n+1}$, et si le rang de la première lettre de V dans $W''_n(\omega_0, l)$ est aussi multiple de $l_n k'_{n+1} m_{n+1}$. Comme $\delta_{n+1} + 4\,\varepsilon_{n+1} < 1/3$, on a $|V_i| > l_n k_{n+1} m_{n+1}/2$ pour tout bon indice i ; en enlevant moins de $2\,l_n k'_{n+1} m_{n+1}$ lettres à V_i, on peut donc trouver un sous-mot $\tilde{V}_i$ de $W''_n(\omega_0, l)$, bien placé, et tel que

$$\overline{f}\left(V_i, \tilde{V}_i\right) < \frac{2\,l_n k'_{n+1} m_{n+1}}{l_n k_{n+1} m_{n+1}/2} = \frac{4}{b_{n+1}} < \varepsilon_{n+1},$$

d'où

$$\overline{f}\left(\tilde{V}_i, W_i\right) < \delta_{n+1} + 5\,\varepsilon_{n+1}. \tag{20}$$

Enfin, pour tout sous-mot V de $W''_n(\omega_0, l)$, notons d_V le nombre de fois où deux n-blocs consécutifs et différents de ω_0 rencontrent V. Par le lemme 8, et puisque $l < 2\,l_{n+1}$, on a

$$\sum_{i \text{ bon indice}} d_{\tilde{V}_i} \leq 200\, l_n q_{n+1} m_{n+1},$$

et comme il y a au moins $\varepsilon_{n+1} q_{n+1}/9$ bons indices, on en déduit l'existence d'un bon indice i tel que $d_{\tilde{V}_i} \leq 1\,800\, l_n m_{n+1}/\varepsilon_{n+1}$.

En résumé: si $\omega \in A(\omega_0, l)$, en écrivant $W'_n(\omega, l_{n+1}) = W_1 \dots W_{q_{n+1}}$ avec les W_i de longueur $l_n k_{n+1} m_{n+1}$, on est assuré de l'existence d'un i dans $\{1, \dots, q_{n+1}\}$, et d'un sous-mot V bien placé de $W''_n(\omega_0, l)$, tels que

$$\overline{f}(W_i, V) < \delta_{n+1} + 5\,\varepsilon_{n+1}, \tag{21}$$

$$\text{et} \qquad d_V \leq \frac{1\,800\, l_n m_{n+1}}{\varepsilon_{n+1}}. \tag{22}$$

Fixons maintenant un sous-mot V bien placé de $W''_n(\omega_0, l)$ vérifiant (22), un indice $i \in \{1, \dots, q_{n+1}\}$, et cherchons à majorer la probabilité que l'inégalité (21) ait lieu.

Le sous-mot W_i de $W'_n(\omega, l_{n+1})$ est la concaténation de $k'_{n+1} m_{n+1}$ mots de longueur $l_n b_{n+1}$:

$$W_i = \overline{U}_{1,1} \dots \overline{U}_{1,k'_{n+1}}\, \overline{U}_{2,1} \dots \overline{U}_{2,k'_{n+1}} \dots \overline{U}_{m_{n+1},1} \dots \overline{U}_{m_{n+1},k'_{n+1}}.$$

Chaque $\overline{U}_{j,k}$ est de la forme $(U_{j,k})^{b_{n+1}}$, avec

$$\begin{aligned} U_{j,k} &= W|_0^{l_n}\left(T_{n+1}^{(i-1)l_n k_{n+1} m_{n+1} + (j-1) l_n k_{n+1} + (k-1) l_n b_{n+1}} \omega, T_n\right) \\ &\quad \text{si } T_{n+1}^{(i-1)l_n k_{n+1} m_{n+1} + (j-1) l_n k_{n+1} + (k-1) l_n b_{n+1}} \omega \in \Omega \setminus M_n, \\ U_{j,k} &= \omega \dots \omega \qquad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Si l'indice k est fixé, la proposition 7 permet de dire :

$$\textit{Les } m_{n+1} \textit{ mots } U_{1,k}, \ldots, U_{m_{n+1},k} \textit{ sont indépendants.} \tag{23}$$

Lorsque (21) a lieu, on peut décomposer V sous la forme

$$V = V_{1,1} \ldots V_{1,k'_{n+1}} V_{2,1} \ldots V_{2,k'_{n+1}} \ldots V_{m_{n+1},1} \ldots V_{m_{n+1},k'_{n+1}},$$

avec

$$\sum_{k=1}^{k'_{n+1}} \sum_{j=1}^{m_{n+1}} \frac{|\overline{U}_{j,k}| + |V_{j,k}|}{|W_i| + |V|} \overline{f}\left(\overline{U}_{j,k}, V_{j,k}\right) < \delta_{n+1} + 5\,\varepsilon_{n+1}. \tag{24}$$

De (24), on déduit facilement l'existence d'un indice k dans $\{1, \ldots, k'_{n+1}\}$ tel que

$$\sum_{j=1}^{m_{n+1}} \frac{|\overline{U}_{j,k}| + |V_{j,k}|}{\sum_{1 \le s \le m_{n+1}} |\overline{U}_{s,k}| + |V_{s,k}|} \overline{f}\left(\overline{U}_{j,k}, V_{j,k}\right) < \delta_{n+1} + 5\,\varepsilon_{n+1}.$$

Ce k étant fixé, la démonstration du lemme 10 assure que le nombre d'indices $j \in \{1, \ldots, m_{n+1}\}$ tels que

$$\overline{f}\left(\overline{U}_{j,k}, V_{j,k}\right) < \delta_{n+1} + 6\,\varepsilon_{n+1} \tag{25}$$

vaut au moins $\varepsilon_{n+1} m_{n+1}/9$. Prenons un indice j vérifiant (25); comme $\overline{U}_{j,k} = (U_{j,k})^{b_{n+1}}$, en appliquant à nouveau le lemme 10 on obtient un découpage de $V_{j,k}$ sous la forme

$$V_{j,k} = V_{j,k,1} \ldots V_{j,k,b_{n+1}},$$

avec

$$\sum_{r=1}^{b_{n+1}} \frac{|U_{j,k}| + |V_{j,k,r}|}{|\overline{U}_{j,k}| + |V_{j,k}|} \overline{f}\left(U_{j,k}, V_{j,k,r}\right) = \overline{f}\left(\overline{U}_{j,k}, V_{j,k}\right) < \delta_{n+1} + 6\,\varepsilon_{n+1}.$$

On sait alors qu'il existe au moins $\varepsilon_{n+1} b_{n+1}/9$ indices r tels que

$$\overline{f}\left(U_{j,k}, V_{j,k,r}\right) < \delta_{n+1} + 7\,\varepsilon_{n+1}. \tag{26}$$

Or, comme $\overline{f}\left(\overline{U}_{j,k}, V_{j,k}\right) < \delta_{n+1} + 6\,\varepsilon_{n+1} < 1/3$, on a forcément $|V_{j,k}| < 2\,b_{n+1} l_n$, et donc $V_{j,k}$ rencontre au plus 3 n-blocs de ω_0. Mais $\varepsilon_{n+1} b_{n+1}/9 > 3$, et donc il existe un indice $r \in \{1, \ldots, b_{n+1}\}$ vérifiant (25), et tel que $V_{j,k,r}$ soit entièrement contenu dans un n-bloc de ω_0.

Nouveau résumé : notons m' le plus petit entier supérieur ou égal à $\varepsilon_{n+1} m_{n+1}/9$. Si (21) a lieu, il existe un indice $k \in \{1, \ldots, k'_{n+1}\}$, m' indices $j_1, \ldots, j_{m'}$ dans $\{1, \ldots, m_{n+1}\}$, et m' sous-mots $V_1, \ldots, V_{m'}$ de V, chacun contenu dans un n-bloc de ω_0, tels que pour tout $s \in \{1, \ldots, m'\}$,

$$\overline{f}\left(U_{j_s,k}, V_s\right) < \delta_{n+1} + 7\,\varepsilon_{n+1} < \delta_n.$$

Or, si k, $j_1, \ldots, j_{m'}$, $V_1, \ldots, V_{m'}$ sont fixés, alors pour tout $s \in \{1, \ldots, m'\}$ l'événement

$$E_s \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\overline{f}\left(U_{j_s,k}, V_s\right) < \delta_n\right)$$

est de probabilité majorée par $\eta_n(l_n)$ (voir (18)). Puis, grâce à (23), on sait que ces m' événements sont indépendants, et donc la probabilité qu'ils soient réalisés simultanément vérifie

$$\mu(E_1 \cap \ldots \cap E_{m'}) \ \leq \ \Big(\eta_n(l_n)\Big)^{\varepsilon_{n+1} m_{n+1}/9}.$$

Majorons maintenant le nombre de choix possibles pour k, $j_1, \ldots, j_{m'}$, $V_1, \ldots, V_{m'}$.

- Il y a k'_{n+1} choix pour k.
- Le nombre de choix possibles pour $j_1, \ldots, j_{m'}$ dans $\{1, \ldots, m_{n+1}\}$ est inférieur à $2^{m_{n+1}}$.
- Les sous-mots $V_1, \ldots, V_{m'}$ sont entièrement déterminés par la donnée de leur longueur respective, du n-bloc dans lequel chacun est contenu, et du rang de leur première lettre (modulo l_n) dans ce n-bloc.
  - La longueur de chaque V_s étant inférieure à $2l_n$, il y a moins de $(2l_n)^{m_{n+1}}$ choix possibles pour les longueurs des V_s.
  - Puisque V vérifie (22), le nombre de choix différents pour les n-blocs est majoré par le nombre d'applications croissantes de $\{1, \ldots, m'\}$ dans $\{1, \ldots, 1\,800\, l_n m_{n+1}/\varepsilon_{n+1}\}$. En utilisant le lemme 11, on montre que ce nombre est inférieur à

$$m_{n+1}\, 2^{m_{n+1}}\, 2^{3\sqrt{m_{n+1}(1\,800\, l_n m_{n+1}/\varepsilon_{n+1})}} \ = \ m_{n+1}\, 2^{\left(1+90\sqrt{2l_n/\varepsilon_{n+1}}\right) m_{n+1}}.$$

  - Enfin, le nombre de choix possibles pour le rang des premières lettres est majoré par $l_n^{m_{n+1}}$.

On en déduit que, i et V étant fixés, la probabilité que (21) ait lieu est majorée par

$$k'_{n+1}\, m_{n+1} \left(l_n^2\, 2^{\,3+90\sqrt{2l_n/\varepsilon_{n+1}}} \Big(\eta_n(l_n)\Big)^{\varepsilon_{n+1}/9} \right)^{m_{n+1}}.$$

Enfin, le nombre de choix pour i vaut q_{n+1}, et le nombre de choix pour V est majoré par le nombre de sous-mots bien placés dans $W''_n(\omega_0, l)$, qui est clairement inférieur à $(b_{n+1} q_{n+1})^2$. On obtient finalement

$$\begin{aligned}
\mu\Big(A(\omega_0, l)\Big) \ &\leq \ b_{n+1}^2 q_{n+1}^3 k'_{n+1} m_{n+1} \left(l_n^2\, 2^{\,3+90\sqrt{2l_n/\varepsilon_{n+1}}} \Big(\eta_n(l_n)\Big)^{\varepsilon_{n+1}/9} \right)^{m_{n+1}} \\
&= \ b_{n+1}^2 q_{n+1}^3 k'_{n+1} m_{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Il est maintenant clair que si m_{n+1} est assez grand, on a pour tout $\omega_0 \notin M_n$ et tout $l \geq 1$

$$\mu\Big(A(\omega_0, l)\Big) \ \leq \ \eta_{n+1}(l_n k_{n+1} q_{n+1} m_{n+1}),$$

i.e. $\mathscr{H}_{n+1}$ est vérifiée.

On peut donc bien effectuer la construction de sorte à avoir $\mathscr{H}_n$ pour tout entier $n \geq 1$. Mais pour tout n, la mesure σ vérifie (8), et donc (9) ; on en déduit aisément que $T = T_\sigma$ ne peut pas être lâchement Bernoulli.

Références

[1] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin, et Ya.G. Sinai. *Ergodic Theory*. Springer-Verlag, 1982.

[2] J. Feldman. New K-automorphisms and a problem of Kakutani. *Israel Journal of Mathematics*, 24: 16–38, 1976.

[3] C. Foias et S. Stratila. Ensembles de Kronecker dans la théorie ergodique. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 20: 166–168, 1967.

[4] S. Kakutani. Induced measure preserving transformations. *Proc. Acad. Tokyo*, 19: 635–641, 1943.

[5] D.S. Ornstein, D.J. Rudolph, et B. Weiss. *Equivalence of Measure Preserving Transformations*. Memoirs of the American Mathematical Society 262, 1982.

[6] A. Rothstein. Versik processes : First steps. *Israel Journal of Mathematics*, 36: 205–224, 1980.

[7] T. de la Rue. Entropie d'un système dynamique gaussien : Cas d'une action de $\mathbb{Z}^d$. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 317: 191–194, 1993.

[8] T. de la Rue. Mouvement moyen et système dynamique gaussien. *Probab. Theory Relat. Fields*, 102: 45–56, 1995.

[9] T. de la Rue. Systèmes dynamiques gaussiens d'entropie nulle, lâchement et non lâchement Bernoulli. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 16: 379–404, 1996.