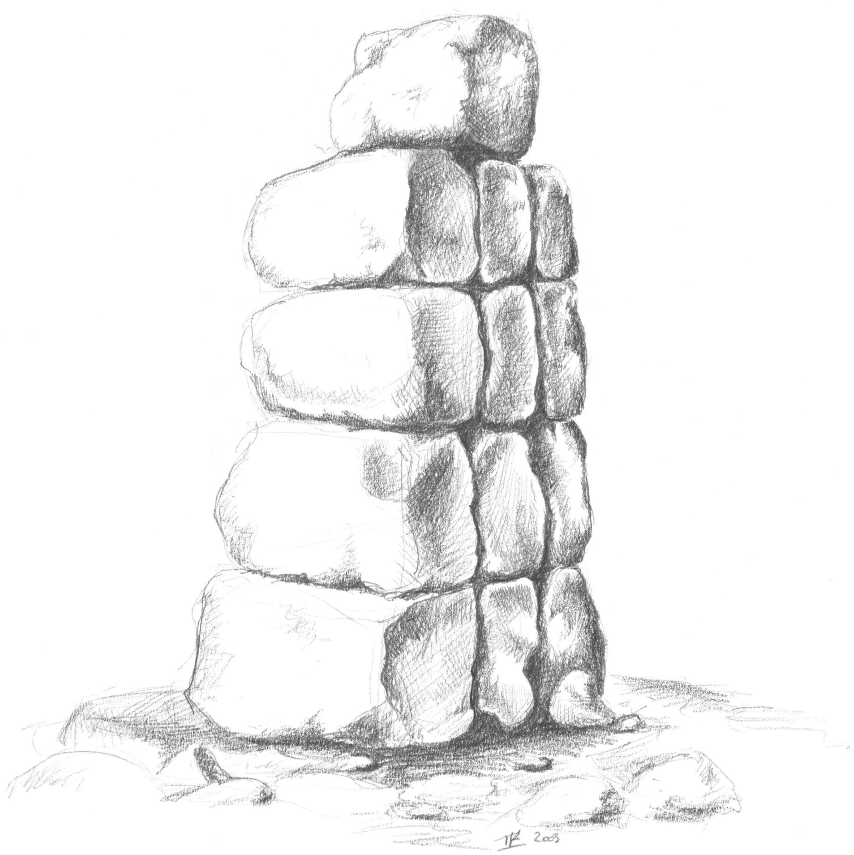
Quelques aspects de la théorie ergodique



Document de synthèse présenté pour
l'Habilitation à Diriger des Recherches
par

Thierry DE LA RUE

soutenue à l'université de Rouen le 5 mai 2004 devant le jury composé de MM.

Claude Dellacherie (président)
Mariusz Lemańczyk (rapporteur),
François Parreau (rapporteur),
Jean-Paul Thouvenot (rapporteur),
Emmanuel Lesigne,
José de Sam Lazaro,
Dalibor Volný.

Table des matières

Remerciements

J'adresse mes sincères remerciements à Mariusz Lemańczyk, François Parreau, Dan Rudolph et Jean-Paul Thouvenot pour avoir accepté de rapporter ce travail, ainsi qu'à Claude Dellacherie, Emmanuel Lesigne, José de Sam Lazaro et Dalibor Volný qui m'honorent de leur présence dans mon jury.

Ces recherches doivent énormément à la rencontre enrichissante de nombreux autres mathématiciens. Sans donner la liste exhaustive de ceux auprès de qui j'ai appris quelque chose, je citerai simplement Anzelm Iwanik, avec qui j'ai eu la chance de partager mon bureau pendant quelques mois, et à la mémoire duquel je voudrais dédier ce travail.

Introduction

La *théorie ergodique* est un thème mathématique extrêmement vaste que l'on pourrait tenter de résumer grossièrement à l'étude de la situation suivante : un (semi-)groupe de transformations $(T_g)_{g\in G}$ agit sur un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$, en préservant la mesure.

Les espaces mesurés considérés dans ce document sont tous des espaces probabilisés, plus précisément même des *espaces de Lebesgue*. Depuis V.A. Rokhlin [48], on désigne ainsi les espaces probabilisés qui, en tant qu'espaces mesurés sont isomorphes à l'intervalle $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue. (Pour être tout à fait exact, un espace de Lebesgue est un espace mesuré isomorphe à une partie de l'intervalle $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue, à laquelle on a éventuellement rajouté une combinaison de masses de Dirac ponctuelles ; mais dans l'immense majorité des cas en théorie ergodique, la partie atomique n'existe pas.) Cette hypothèse de régularité de l'espace n'est pas trop restrictive, car les espaces probabilisés apparaissant "naturellement" sont automatiquement des espaces de Lebesgue (voir par exemple [52]).

Pour ce qui est du groupe agissant sur l'espace, on s'intéresse essentiellement ici à une action de $\mathbb{Z}$, donc engendrée par une seule transformation. On appelle *automorphismes de l'espace de Lebesgue* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ les transformations T de X possédant les propriétés suivantes :

- T est inversible ;
- T et T^{-1} sont mesurables ;
- pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\mu(A) = \mu(TA) = \mu(T^{-1}A)$.

On convient le plus souvent d'identifier deux telles transformations qui coïncident en-dehors d'un ensemble négligeable, et le terme "automorphisme" désigne plutôt une classe d'équivalence de transformations qui coïncident presque partout. On note $\mathrm{Aut}(X, \mathscr{A}, \mu)$ le groupe des automorphismes de $(X, \mathscr{A}, \mu)$.

Les travaux présentés ici se rapportent donc à l'étude des automorphismes d'un espace de Lebesgue. On désigne dans la suite par le terme générique de *système dynamique* un quadruplet $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$, où l'automorphisme T agit sur l'espace de Lebesgue $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Souvent, un tel système sera désigné par le seul symbole T.

Première partie

Constructions de systèmes dynamiques

Dans cette première partie sont présentées quelques méthodes générales qui permettent de construire des systèmes dynamiques. La liste qui suit ne se veut évidemment pas exhaustive ; il s'agit simplement d'introduire les principaux acteurs des travaux exposés dans la suite.

1 Construction à partir de rien : découpage et empilage

Cette première méthode, très classique, permet de créer "à la main" un système dynamique en partant simplement de l'espace de Lebesgue canonique constitué de l'intervalle $[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue. Il s'agit d'un procédé plutôt géométrique qui ressemble à un jeu de construction. Manié avec art, il permet d'obtenir certains des plus beaux exemples de systèmes dynamiques.

Le principe consiste à définir progressivement la transformation T sur des parties de plus en plus grandes de l'espace. On procède par étapes successives : à l'étape n on a fixé $T(x)$ pour x appartenant à une partie D_n de X ; à l'étape $n+1$ il s'agit de déterminer $T(x)$ pour $x \in D_{n+1} \setminus D_n$. Si $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$, la description de toutes les étapes permet de définir ainsi T sur tout l'espace.

À la première étape, on découpe $[0,1]$ en un nombre fini d'intervalles que l'on range en un certain nombre de *tours*. On appelle ainsi une famille $\mathscr{T} = (I_0, I_1, \ldots, I_{h-1})$ d'intervalles disjoints qui sont tous de même mesure (cette mesure est appelée *largeur de la tour*). On représente généralement une tour en plaçant les intervalles qui la constituent les uns au-dessus des autres : la *base* I_0 en bas, le *toit* I_{h-1} en haut. Le nombre h d'intervalles dans la tour est naturellement appelé la *hauteur* de $\mathscr{T}$. Ayant ainsi partitionné X en une famille finie de tours disjointes, la transformation T est définie à cette étape de la façon suivante : chaque point x qui n'est pas sur le toit d'une tour est envoyé sur le point $T(x)$ situé immédiatement au-dessus de lui dans sa tour. Là où elle est définie, (c'est-à-dire sur tout l'espace sauf sur la réunion des toits des tours), T est donc une transformation affine par morceaux, qui préserve la mesure de Lebesgue puisqu'elle consiste à translater des intervalles vers d'autres intervalles de même longueur.

Le passage de l'étape n à l'étape $n+1$ se résume parfaitement par l'expression consacrée *cutting and stacking*, qui peut se traduire par *découpage et empilage*.

Le *découpage* consiste à découper verticalement les tours obtenues à l'étape n, ce qui revient à partitionner leurs bases en un certain nombre d'intervalles disjoints. Ce passage pourrait aussi être appelé la *multiplication des tours*, puisque chaque tour de l'étape n se transforme ainsi en autant de tours de même hau-

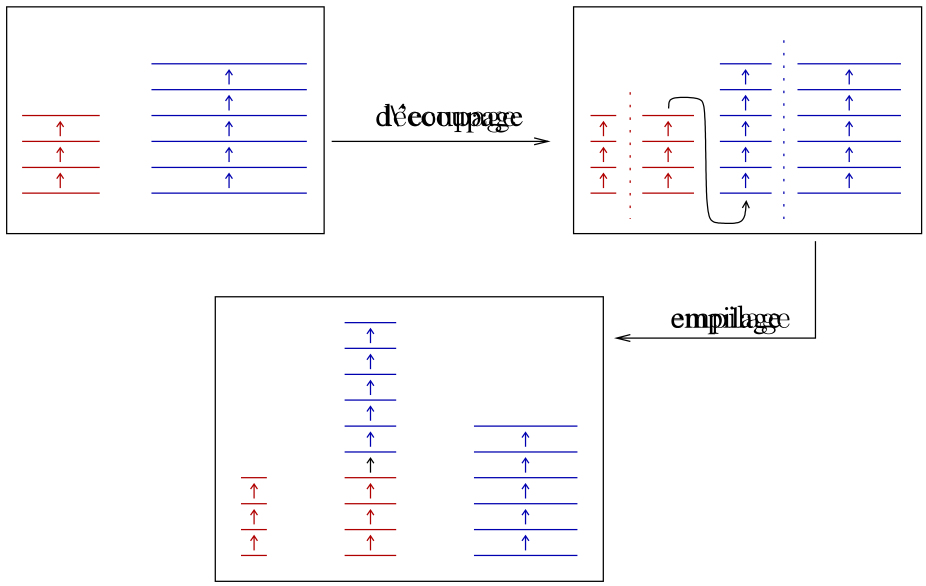


FIG. 1 – Construction par découpage et empilage

teur que l'on a découpé d'intervalles dans sa base. À ce niveau, T est toujours définie de la même façon qu'à l'étape n : $T(x)$ continue à être le point situé immédiatement au-dessus de x dans sa tour, sauf pour x appartenant à la réunion des toits qui n'a pas changé.

C'est justement le rôle de l'*empilage* d'étendre le domaine de définition de T. Si on a obtenu deux tours $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ de même largeur, on peut en effet empiler la tour $\mathscr{T}_2$ au-dessus de la tour $\mathscr{T}_1$, ce qui revient à définir T sur le toit de $\mathscr{T}_1$ en l'envoyant de manière affine vers la base de $\mathscr{T}_2$. Il est possible d'empiler ainsi les unes au-dessus des autres un nombre arbitraire de tours, pourvu qu'elles soient toutes de même largeur. Si on parvient à réaliser ainsi suffisamment d'empilements, la réunion des toits des nouvelles tours (plus hautes) diminue d'autant.

Une fois précisée la façon de découper et d'empiler les tours à chaque étape n, il est possible de définir ainsi T sur tout $[0, 1]$. La transformation ainsi obtenue est automatiquement un automorphisme de l'espace de Lebesgue.

Une telle liberté étant laissée à chaque étape dans la manière de découper et d'empiler les tours, il n'est pas possible de donner des propriétés vérifiées par toutes les transformations obtenues par cette méthode. En fait, la construction par découpage et empilage permet d'obtenir, au moins théoriquement, n'importe quel système dynamique ! Mais des propriétés très intéressantes apparaissent lorsque l'on impose certaines contraintes.

1.1 Le cas particulier des systèmes de rang 1

Les systèmes *de rang 1* constituent une classe particulière usuellement obtenue par cette méthode de découpage et empilage, qui joue un rôle important dans la suite de cette étude. Le "1" de "rang 1" signifie qu'à chaque étape de la construction, on n'a essentiellement qu'une seule tour. Pour être précis et cohérent avec la méthode décrite ci-dessus, disons qu'à chaque étape n il n'y a qu'une seule tour dont la hauteur h_n est supérieure à 2, et éventuellement une autre tour dégénérée de hauteur 1, donc réduite à un seul intervalle, qui sert de "réservoir" dans lequel on puise les *espaceurs* (essai de traduction du terme habituellement utilisé de *spacer*).

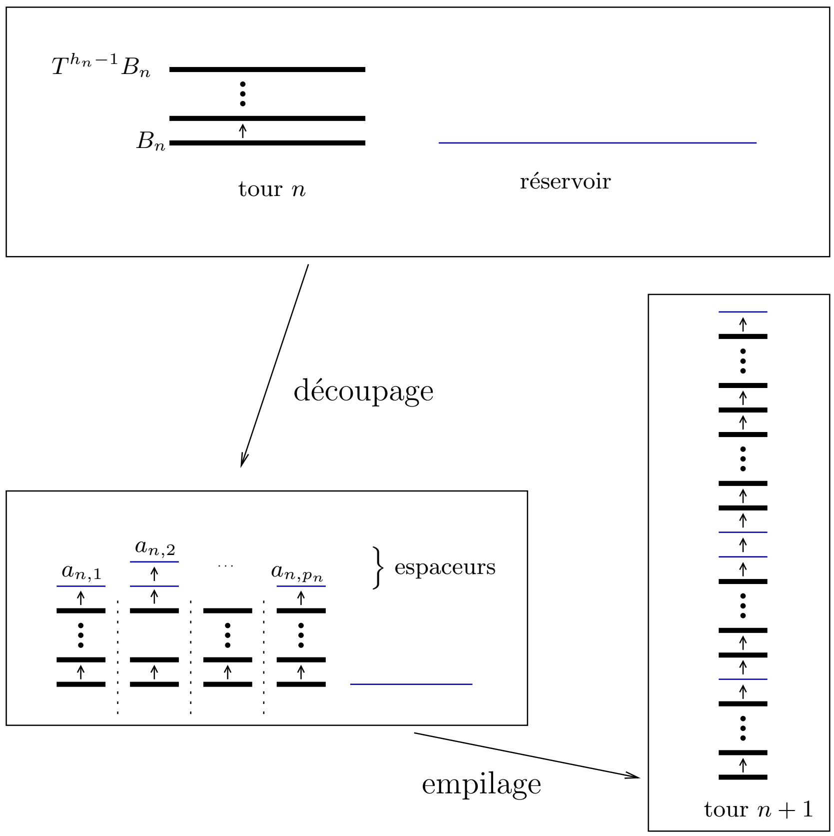


FIG. 2 – Construction d'un système de rang 1

Soit B_n la base de la tour obtenue à l'étape n : cette tour est donc constituée des intervalles $B_n, TB_n, \ldots, T^{h_n-1}B_n$. Décrivons précisément le passage de l'étape n à l'étape $n+1$ dans la construction du rang 1. Ce passage est paramétré par des entiers naturels $p_n \geq 2$ et $a_{n,i} \geq 0$, $1 \leq i \leq p_n$. On découpe la base B_n de la tour n en p_n intervalles de même longueur $I_{n,i}$, $1 \leq i \leq p_n$. La base de la tour $n+1$ est $B_{n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} I_{n,1}$. Les étages $T^k B_{n+1}$, $1 \leq k \leq h_n - 1$ sont les sous-intervalles des étages $T^k B_n$ donnés par la définition de T à l'étape n. On puise ensuite $a_{n,1}$ intervalles (espaceurs) $S_1, \ldots, S_{a_{n,1}}$ de même longueur que B_{n+1} dans le réservoir. On pose pour $1 \leq j \leq a_{n,1}$

$$T^{h_n+j-1}B_{n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} S_j.$$

Puis on revient dans B_n en posant $T^{h_n+a_{n,1}}B_{n+1} \stackrel{\text{déf}}{=} I_{n,2}$. On recommence la même procédure à partir de $I_{n,2}$ en rajoutant cette fois $a_{n,2}$ espaceurs avant de revenir dans B_n en $I_{n,3}$, et ainsi de suite jusqu'à $T^{h_n-1}I_{n,p_n}$ au-dessus duquel on rajoute a_{n,p_n} espaceurs.

La donnée de la hauteur h_1 de la première tour et des paramètres p_n et $a_{n,i}$ $(n \geq 1,\ 1 \leq i \leq p_n)$ permet ainsi de construire une suite infinie de tours. Avec la condition

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_{n,1} + \cdots + a_{n,p_n}}{p_n h_n} \ < \ +\infty, \tag{1}$$

la mesure de la réunion X des intervalles utilisés est finie, et en changeant éventuellement la longueur de B_1, on peut supposer que cette mesure totale est 1. La transformation T est alors définie (presque) partout sur $[0,1]$. Un tel système est toujours ergodique et d'entropie nulle.

Le premier et le plus simple exemple de système de rang 1 est la *transformation de Von Neumann-Kakutani*. Elle est obtenue par cette méthode en prenant $p_n = 2$ pour tout n, et sans jamais mettre d'espaceurs. Toutes les *rotations irrationnelles* ($x \longmapsto x + \alpha \mod 1$, avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) sont également des systèmes de rang 1. En général, tous les systèmes ergodiques à *spectre discret*, c'est-à-dire tels que $L^2(\mu)$ soit engendré par les fonctions propres de l'opérateur $U_T\ :\ f \longmapsto f \circ T$, sont de rang 1 [7].

Un autre exemple très important, dont il sera beaucoup question dans la suite, est la célèbre *transformation de Chacon*, construite en prenant $p_n = 3$ pour tout n, $a_{n,1} = a_{n,3} = 0$ et $a_{n,2} = 1$: on ne met un espaceur que sur la tour du milieu. Malgré la simplicité de sa construction, cette transformation possède bon nombre de propriétés intéressantes. C'est notamment l'un des premiers exemples explicites de système dynamique qui soit faiblement mélangeant mais non mélangeant (voir [4], où la construction originale de R.V. Chacon est obtenue par un découpage en seulement deux colonnes ; mais l'argument employé reste valable pour la construction présentée ici à laquelle fait désormais référence le terme de “transformation de Chacon”).

Il est également possible de construire des systèmes de rang 1 mélangeants : citons le célèbre rang 1 mélangeant de D.S. Ornstein, obtenu en choisissant les espaceurs de manière aléatoire [36], ou encore le rang 1 en escalier, construit en prenant une suite p_n qui tend vers $+\infty$ et pour $1 \leq i \leq p_n$, $a_{n,i} = i - 1$. T.M. Adams [1] a montré que si $\lim_{n\longrightarrow\infty} p_n/n^d = 0$ pour un $d > 0$, le rang 1 obtenu à la fin est mélangeant.

Parmi les particularités remarquables des systèmes de rang 1, mentionnons la *simplicité spectrale* L^p pour tout $p \in [1, +\infty[$: il existe $f \in L^p$ tel que le sous-espace engendré par les $f \circ T^p,\ p \in \mathbb{Z}$, soit dense dans L^p (voir par exemple [11]). Ils vérifient aussi le “Weak Closure Theorem”, démontré par J. King dans [27] : toute transformation S de X préservant μ et commutant avec T est une limite faible de puissances de T.

2 Construction à partir d'un processus stationnaire

Une autre façon classique pour obtenir un système dynamique consiste à le construire en partant d'un processus stationnaire $(X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$, où chaque variable aléatoire X_p est à valeurs dans un espace E polonais (le plus souvent, E est un alphabet fini ou dénombrable, ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). À un tel processus est associé de manière canonique un système dynamique, construit sur l'espace $X \stackrel{\text{déf}}{=} E^{\mathbb{Z}}$ muni de la probabilité μ qui est la loi de $(X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$: puisque ce processus est stationnaire, μ est invariante par la transformation T qui consiste à décaler les coordonnées vers la gauche. (Si $x = (x_p)_{p\in\mathbb{Z}} \in X$, $T(x)$ est le point $y = (y_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ défini par $\forall p \in \mathbb{Z},\ y_p \stackrel{\text{déf}}{=} x_{p+1}$.)

2.1 Schémas de Bernoulli et autres Markov

Un exemple simple, mais parmi les plus importants, de système dynamique construit à partir d'un processus stationnaire est celui obtenu lorsque les variables aléatoires X_p sont indépendantes et identiquement distribuées sur E (le plus souvent dans ce cas, E est un alphabet fini). Le système dynamique est alors appelé *schéma de Bernoulli*. On note usuellement $B(p_1, \ldots, p_k)$ le schéma de Bernoulli engendré par un processus i.i.d. $(X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ prenant ses valeurs dans $\{1, \ldots, k\}$, et tel que $P(X_0 = j) = p_j$.

La résolution de questions posées par l'étude de ces systèmes dynamiques “élémentaires” a conduit au développement de certains concepts devenus essentiels en théorie ergodique. Ainsi, la question de savoir si les deux schémas de Bernoulli $B(1/2, 1/2)$ et $B(1/3, 1/3, 1/3)$ sont isomorphes n'a pu être résolue que grâce au développement de la notion d'*entropie* d'un système dynamique par Kolmogorov et Sinaï à la fin des années 1950. L'entropie d'un schéma de Bernoulli $B(p_1, \ldots, p_k)$ est remarquablement simple à calculer : elle vaut $-(p_1 \log p_1 + \cdots + p_k \log p_k)$. Comme l'entropie ne change pas par isomorphisme, on en conclut que les deux schémas de Bernoulli $B(1/2, 1/2)$ et $B(1/3, 1/3, 1/3)$ ne sont pas isomorphes. Puis s'est naturellement posée la question de savoir si deux schémas de Bernoulli $B(p_1, \ldots, p_k)$ et $B(q_1, \ldots, q_l)$ tels que $p_1 \log p_1 + \cdots + p_k \log p_k = q_1 \log q_1 + \cdots + q_l \log q_l$ sont isomorphes. D.S. Ornstein répondit par l'affirmative, en développant une théorie remarquable qui permet notamment de caractériser tous les processus stationnaires engendrant un système dynamique isomorphe à un Bernoulli (voir par exemple [39]). Parmi ceux-ci, on trouve notamment les proches cousins des processus i.i.d. : les processus de Markov (à valeurs dans un ensemble fini), dès que le système engendré est totalement ergodique.

2.2 Systèmes dynamiques gaussiens

Partons maintenant d'un processus $(X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ à valeurs réelles, gaussien centré. Sa loi est complètement déterminée par les covariances $\mathbb{E}[X_p X_q]$, et la stationnarité du processus implique que celles-ci s'expriment sous la forme

$$\mathbb{E}[X_p X_q] = \int_{[-\pi,\pi]} e^{i(q-p)t}\, d\gamma(t),$$

où γ est une mesure finie symétrique sur $[-\pi, \pi]$ appelée *mesure spectrale du processus*. De la donnée de cette mesure spectrale se déduisent toutes les propriétés du système dynamique engendré par le processus (X_p), appelé *système dynamique gaussien*. Ainsi par exemple, le système est ergodique si et seulement si γ n'a pas d'atome, et dans ce cas il est même faiblement mélangeant (pour une présentation complète des propriétés spectrales des systèmes gaussiens, on peut par exemple consulter [5]). L'entropie d'un système dynamique gaussien est soit nulle, soit infinie, selon que γ est singulière ou non par rapport à la mesure de Lebesgue (voir [51]).

Dans [53], dont l'objet est l'étude de certaines propriétés des systèmes gaussiens, une autre représentation de ces systèmes est proposée (voir aussi [54]) : au lieu de considérer le décalage des coordonnées sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ muni d'une certaine mesure donnée par la mesure spectrale γ du processus, on se place sur l'espace canonique du mouvement brownien complexe issu de 0, sur l'intervalle de temps [0,1], c'est-à-dire l'espace des applications continues de [0,1] dans $\mathbb{C}$ qui s'annulent en $t = 0$, muni de la mesure de Wiener. Pour chaque mesure de probabilité σ sur $[0, \pi]$, on construit une transformation T_σ de la trajectoire du mouvement brownien qui préserve la mesure de Wiener, et telle que le système dynamique obtenu soit isomorphe au système gaussien de mesure spectrale γ (mesure sur $[-\pi, \pi]$ construite par symétrie à partir de σ). Le gros avantage de cette représentation est de pouvoir considérer simultanément plusieurs transformations construites à partir de mesures spectrales différentes sur le *même* espace de probabilité. En particulier, il est possible de mieux comprendre le comportement de la transformation T_σ à étudier (où σ est sans atomes), en l'approchant par T_{σ_n}, où (σ_n) est une suite de probabilités purement atomiques convergeant vers σ. Les transformations obtenues par ces mesures atomiques σ_n sont en effet remarquablement simples à décrire : σ_n étant concentrée sur les points $\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$, de masses respectives $m_1, \ldots, m_p$, posons, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, $t_k \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{k} m_j$ et $t_0 \stackrel{\text{déf}}{=} 0$. On découpe la trajectoire x en p morceaux, correspondant aux intervalles de temps $[t_{k-1}, t_k]$ $(1 \leq k \leq p)$, puis on effectue une rotation de l'angle α_k sur le k-ième morceau. $T_{\sigma_n}(x)$ est la trajectoire obtenue en recollant bout à bout les nouveaux morceaux. On a ainsi, pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$,

$$B_t \circ T_{\sigma_n} = \sum_{j=1}^{k} e^{i\alpha_j} \left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right) + e^{i\alpha_{k+1}} \left(B_t - B_{t_k}\right).$$

3 Construction à partir de systèmes dynamiques existants

En théorie ergodique, on rencontre aussi fréquemment la construction de nouveaux systèmes dynamiques à partir de systèmes déjà existants.

3.1 Système induit

Soit $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ un système dynamique, et A une partie mesurable de X, de mesure non nulle. On définit le *temps de retour dans* A par

$$r_A(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \min \{p \geq 1 \;/\; T^p x \in A\}.$$

Le théorème de récurrence de Poincaré affirme que pour μ-presque tout $x \in A$, $r_A(x)$ est fini. On note alors T_A la transformation de A définie par

$$T_A x \stackrel{\text{déf}}{=} T^{r_A(x)} x.$$

On note aussi $\mathscr{A}_A$ l'ensemble des parties mesurables de X qui sont contenues dans A, et $\mu_A \stackrel{\text{déf}}{=} \mu(\cdot)/\mu(A)$ la restriction normalisée de μ à $\mathscr{A}_A$. Alors T_A est une transformation mesurable inversible qui préserve la probabilité μ_A. Le système dynamique $(A, \mathscr{A}_A, \mu_A, T_A)$ ainsi obtenu est appelé *système induit par T sur A*.

Le problème se pose de savoir quels sont les systèmes dynamiques qui peuvent être induits par une transformation ergodique donnée T. (Notons au passage que si T est ergodique, toute transformation induite par T l'est également.) En 1943, S. Kakutani [24] a introduit une relation d'équivalence dont l'étude est étroitement liée à cette question. Deux systèmes dynamiques ergodiques $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ et $(X', \mathscr{A}', \mu', T')$ sont dits *équivalents au sens de Kakutani* si on peut trouver $A \in \mathscr{A}$ et $A' \in \mathscr{A}'$ tels que les transformations induites T_A et $T'_{A'}$ soient isomorphes. (Notez qu'il n'est pas évident *a priori* que cette propriété définisse une relation d'équivalence !)

La formule d'Abramov, qui donne l'entropie d'une transformation induite :

$$h(T_A) = \frac{1}{\mu(A)} h(T),$$

permet de dire qu'il existe au moins trois classes d'équivalence pour cette relation (entropie nulle, strictement positive finie, et entropie infinie). Mais jusqu'à l'introduction par J. Feldman en 1976 [10] de la notion de système *lâchement Bernoulli*, on ne savait pas si deux systèmes dans la même classe d'entropie étaient toujours équivalents. Feldman montre que la "lâche-Bernoullicité" est nécessaire pour qu'un système soit équivalent à une rotation irrationnelle, ou à un décalage de Bernoulli. Il construit aussi des systèmes non lâchement Bernoulli, l'un d'entropie nulle et l'autre d'entropie positive, prouvant ainsi que dans une même classe d'entropie, il existe des systèmes non équivalents au sens de Kakutani. Un peu plus tard, D.S. Ornstein, D.J. Rudolph et B. Weiss [40] ont développé toute une théorie de l'équivalence en utilisant la propriété introduite par Feldman. Ils prouvent en particulier les résultats suivants :

– si T est lâchement Bernoulli et d'entropie strictement positive, les systèmes dynamiques induits par T sont (à part T) tous les systèmes lâchement Bernoulli et d'entropie strictement supérieure à celle de T ;
– si T est lâchement Bernoulli et d'entropie nulle, les systèmes dynamiques induits par T sont tous les systèmes lâchement Bernoulli et d'entropie nulle.

En particulier, il est assez facile de vérifier en utilisant la caractérisation des systèmes lâchement Bernoulli donnée par Feldman que tout système de rang 1 est lâchement Bernoulli. On en déduit par exemple que tout système de rang 1 est isomorphe à un système induit par une rotation irrationnelle. Mais il existe aussi, même en entropie nulle, bien d'autres systèmes que les rang 1 qui soient lâchement Bernoulli.

3.2 Facteur

Un *facteur* du système dynamique $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ est une sous-tribu $\mathscr{F}$ de $\mathscr{A}$ telle que pour tout $F \in \mathscr{F}$, $T(F)$ et $T^{-1}(F)$ appartiennent encore à $\mathscr{F}$. Typiquement, un facteur de T est obtenu en prenant une application mesurable f de X dans un espace polonais E (en pratique, on regarde souvent le cas où f est à valeurs dans un alphabet fini), et en considérant la tribu $\mathscr{F}$ engendrée par toutes les applications $f \circ T^k$, $k \in \mathbb{Z}$. En fait, dans un espace de Lebesgue on peut montrer que tout facteur est (modulo les ensembles négligeables) de ce type ; ce que l'on suppose donc désormais. La donnée d'un facteur de T permet de définir un nouveau système dynamique : on considère l'espace $X_{\mathscr{F}}$ obtenu en identifiant dans X les points x et x' tels que $f(T^k x) = f(T^k x')$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Notons $\pi_{\mathscr{F}}$ la projection canonique de X sur $X_{\mathscr{F}}$, et soit $\mathscr{A}_{\mathscr{F}}$ la tribu constituée des $F \subset X_{\mathscr{F}}$ tels que $\pi_{\mathscr{F}}^{-1}(F) \in \mathscr{A}$. On munit l'espace $X_{\mathscr{F}}$ de la mesure $\mu_{\mathscr{F}}$ image de μ par $\pi_{\mathscr{F}}$. La transformation $T_{\mathscr{F}}$ de $X_{\mathscr{F}}$ définie par

$$\forall x \in X, \quad T_{\mathscr{F}}\Big(\pi_{\mathscr{F}}(x)\Big) \overset{\text{déf}}{=} \pi_{\mathscr{F}}\Big(T(x)\Big)$$

est alors un automorphisme de l'espace de Lebesgue $(X_{\mathscr{F}}, A_{\mathscr{F}}, \mu_{\mathscr{F}})$.

Inversement, si on se donne deux systèmes dynamiques $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu, S)$ tels qu'il existe une application mesurable $\pi : X \longrightarrow Y$ vérifiant

- $\pi(\mu) = \nu$;
- $\pi \circ T = S \circ \pi$;

on obtient un facteur du système T en considérant la tribu $\mathscr{F} \overset{\text{déf}}{=} \pi^{-1}(\mathscr{B})$. Le système dynamique $(X_{\mathscr{F}}, \mathscr{A}_{\mathscr{F}}, \mu_{\mathscr{F}}, T_{\mathscr{F}})$ construit comme ci-dessus est alors isomorphe à $(Y, \mathscr{B}, \nu, S)$. Dans cette situation, on dit aussi que le système S est un *facteur* de T. Attention cependant : S étant un facteur de T, l'application π et la tribu $\mathscr{F}$ ne sont pas en général déterminées de manière unique !

3.3 Produit direct, produit gauche

Le terme de “facteur” est étroitement lié à la notion de “produit”. Lorsque l'on a deux systèmes $(X_1, \mathscr{A}_1, \mu_1, T_1)$ et $(X_2, \mathscr{A}_2, \mu_2, T_2)$, on définit leur *produit (direct)* par la transformation $T_1 \times T_2 : (x_1, x_2) \longmapsto (T_1(x_1), T_2(x_2))$ sur l'espace de Lebesgue produit $(X_1 \times X_2, \mathscr{A}_1 \otimes A_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$. Notons en effet que $T_1 \times T_2$ préserve la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$. Chacun des deux systèmes initiaux T_1 et T_2 est alors un facteur du système produit : les projections π_1 et π_2 sur les deux coordonnées vérifient chacune $\pi_i \circ (T_1 \times T_2) = T_i \circ \pi_i$. Les sous-tribus $T_1 \times T_2$-invariantes correspondant à ces systèmes facteurs sont naturellement la sous-tribu “verticale” $\mathscr{F}_1 \overset{\text{déf}}{=} \{A \times X_2 \ / \ A \in \mathscr{A}_1\}$, et la sous-tribu “horizontale” $\mathscr{F}_2 \overset{\text{déf}}{=} \{X_1 \times A \ / \ A \in \mathscr{A}_2\}$. Ces deux facteurs (au sens de sous-tribus invariantes par la transformation) possèdent dans ce cas les remarquables propriétés suivantes : elles sont indépendantes, et engendrent à elles deux toute la tribu. On dit dans ce cas que $\mathscr{F}_2$ est un *complément indépendant* de $\mathscr{F}_1$.

Mais si la sous-tribu $\mathscr{F}$ est un facteur du système $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$, il n'est pas toujours possible de lui trouver un complément indépendant qui soit aussi un facteur de T. Autrement dit, il n'est pas toujours possible d'écrire T comme le produit *direct* du système $(X_{\mathscr{F}}, \mathscr{A}_{\mathscr{F}}, \mu_F, T_{\mathscr{F}})$ avec un autre système dynamique. En général, pour décomposer un système dynamique sur la base d'un de ses facteurs, il faut faire appel à la notion de produit *gauche*, qui généralise considérablement celle de produit direct.

Soit $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ un système dynamique, et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ un espace de Lebesgue. On se donne pour chaque $x \in X$ un automorphisme S_x de $(Y, \mathscr{B}, \nu)$, de sorte que l'application $\tilde{T}\ :\ (x, y) \longmapsto (T(x), S_x(y))$ soit mesurable. Cette transformation $\tilde{T}$ préserve alors la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$: c'est un automorphisme de l'espace de Lebesgue produit. Le système dynamique ainsi obtenu est appelé *produit gauche* de *base* le système $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$. Le produit direct est évidemment un cas extrêmement simple de produit gauche dans lequel S_x est constant. Un cas un peu moins simple dont il sera question par la suite est celui où l'on s'est donné un automorphisme S de $(Y, \mathscr{B}, \nu)$, et où les S_x sont choisis parmi les puissances de S : cela revient à considérer une application mesurable $k\ :\ X \longrightarrow \mathbb{Z}$ et à étudier la transformation $(x, y) \longmapsto (Tx, S^{k(x)}y)$.

3.4 Couplage

La notion de couplage peut elle aussi être considérée comme une importante généralisation du produit direct de deux systèmes, mais dans une direction tout à fait différente.

Étant donnés $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu, S)$, on appelle *couplage* de ces deux systèmes dynamiques toute mesure de probabilité λ sur $X \times Y$ qui est $T \times S$-invariante, et dont les marges sont respectivement μ et ν. L'ensemble $J(T, S)$ des couplages de T et S n'est jamais vide puisque la mesure produit $\mu \otimes \nu$ est toujours un tel couplage. Chaque $\lambda \in J(T, S)$ définit alors un nouveau système dynamique $(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}, \lambda, T \times S)$ dont les deux systèmes initiaux sont des facteurs (considérer à nouveau les tribus horizontales et verticales). Étudier l'ensemble des couplages possibles de T et S revient finalement à étudier toutes les façons de faire vivre ces deux systèmes "à l'intérieur" (comme facteurs) d'un même troisième. Cette étude permet de révéler ce que ces deux systèmes ont en commun. Cela peut varier entre deux extrêmes : il se peut par exemple que T et S n'aient rien à partager du tout. L'ensemble de leurs couplages est alors réduit au singleton $\mu \otimes \nu$, et on dit dans ce cas que T et S sont *disjoints*. À l'inverse, il est possible que T et S se révèlent isomorphes ; la donnée d'un isomorphisme entre ces deux systèmes permet alors de construire un couplage d'un type très particulier. En effet, si φ est un tel isomorphisme (*i.e.* une application mesurable inversible de X sur Y, vérifiant $\varphi(\mu) = \nu$ et $\varphi \circ T = S \circ \varphi$), on peut définir $\lambda \in J(S, T)$ par

$$\forall A \in \mathscr{A},\ \forall B \in \mathscr{B}, \quad \lambda(A \times B) \ \stackrel{\text{déf}}{=}\ \mu(A \cap \varphi^{-1}(B)).$$

On peut vérifier qu'un tel couplage est porté par le graphe de φ, et possède l'étrange propriété d'identifier les tribus horizontales et verticales : pour tout $A \times Y$ dans la tribu verticale il existe un ensemble $X \times B$ dans la tribu horizontale (donné par $B \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi(A)$) vérifiant $\lambda\Big((A \times Y)\Delta(X \times B)\Big) = 0$, et inversement. De plus, le système dynamique $(X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}, \lambda, T \times S)$ défini par ce couplage est lui-même isomorphe à chacun des deux systèmes S et T.

Réciproquement, si on est capable de trouver un couplage λ de T et S qui identifie ces tribus horizontales et verticales, c'est que ces deux systèmes sont isomorphes.

3.5 Autocouplages

Partant d'un système dynamique $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ supposé ergodique, l'analyse des couplages de ce système *avec lui-même* est particulièrement riche en enseignements. On parle alors des *autocouplages* de T, à travers l'étude desquels peuvent se révéler de nombreuses propriétés intéressantes du système.

Bien sûr, les autocouplages de T comprennent toujours la mesure produit $\mu \otimes \mu$, mais d'autres couplages "évidents" apparaissent aussi dans ce cas. En effet, chaque isomorphisme φ du système $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ sur lui-même permet, on l'a vu, de construire un autocouplage de T porté par le graphe de φ. Or, les isomorphismes de T avec lui-même sont précisément les automorphismes S de $(X, \mathscr{A}, \mu)$ qui commutent avec T. Ainsi, l'étude des autocouplages de T inclut en particulier celle du *commutant de T* :

$$C(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \{S \in \mathrm{Aut}(X, \mathscr{A}, \mu) \;/\; S \circ T = T \circ S\}.$$

Ce commutant contient toujours au moins l'identité et toutes les puissances T^k, $k \in \mathbb{Z}$ de T. Parmi les autocouplages de T, on trouve donc l'autocouplage Δ_0 dit *diagonal*, porté par le graphe de l'identité, mais aussi tous ses translatés Δ_k, $k \in \mathbb{Z}$: les autocouplages portés par les graphes des puissances de T. Puisque l'action de $T \times T$ sur $X \times X$ muni de Δ_k est isomorphe à l'action de T sur X, elle reste en particulier ergodique. L'ensemble $J_e(T)$ des autocouplages *ergodiques* de T vérifie donc toujours

$$\{\Delta_k,\ k \in \mathbb{Z}\} \ \subset \ J_e(T).$$

Certains systèmes, tels la transformation de Chacon ou les rang 1 mélangeants mentionnés auparavant, ne possèdent *aucun* autre autocouplage ergodique (Les autocouplages non ergodiques s'obtiennent en effectuant des combinaisons linéaires convexes d'autocouplages ergodiques). On dit dans ce cas que ces systèmes sont *à autocouplages minimaux d'ordre 2* (l'ordre 2 signifie que l'on ne regarde ici que les couplages de 2 copies du système). Une première conséquence de cette propriété est l'absence de *racine*, c'est-à-dire d'automorphisme S de $(X, \mathscr{A}, \mu)$ pour lesquels il existe un entier $p \geq 2$ vérifiant $S^p = T$. En effet, une telle racine serait automatiquement dans $C(T)$ et permettrait de construire un autocouplage ergodique interdit par la propriété des autocouplages minimaux.

Une autre conséquence des autocouplages minimaux est que le système ne peut avoir de facteur non trivial (les facteurs triviaux de tout système sont la tribu des événements de mesure 0 ou 1 d'une part, et d'autre part la tribu $\mathscr{A}$ toute entière), car l'existence d'un facteur $\mathscr{F}$ dans le système induit l'existence d'un autocouplage de T, appelé *autocouplage relativement indépendant au-dessus de $\mathscr{F}$*, donné par la formule

$$\lambda(A \times B) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_X \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \mid \mathscr{F}\right] \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B \mid \mathscr{F}\right] d\mu.$$

Cet autocouplage vaut $\mu \otimes \mu$ lorsque $\mathscr{F}$ est la tribu des événements de mesure 0 ou 1, il vaut Δ_0 dans le cas $\mathscr{F} = \mathscr{A}$, et les cas intermédiaires ne sont pas possibles à cause des autocouplages minimaux.

Bien d'autres propriétés remarquables de T se révèlent au-travers de ses autocouplages ; citons comme exemple le mélange. Rappelons que T est mélangeant si pour tous A et B dans $\mathscr{A}$,

$$\mu(A \cap T^{-k}B) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu(A)\mu(B).$$

Cette propriété se traduit en termes d'autocouplages par la convergence de la suite Δ_k vers $\mu \otimes \mu$, la topologie sur l'ensemble des autocouplages de T étant définie par

$$\lambda_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda \iff \forall A \in \mathscr{A},\ \forall B \in \mathscr{A},\ \lambda_k(A \times B) \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda(A \times B).$$

Deuxième partie

Quelques questions de théorie ergodique

Dans cette seconde partie sont abordées quelques questions de théorie ergodique (certaines résolues, d'autres pas), liées aux contructions qui viennent d'être présentées.

4 Étude de systèmes dynamiques gaussiens

Outre la construction des systèmes gaussiens par transformation de la trajectoire brownienne complexe, il est utile ici de retenir de [53] un résultat lié de très près aux travaux évoqués dans la suite : on y trouve la construction de deux systèmes dynamiques gaussiens d'entropie nulle, dont l'un est lâchement Bernoulli, donc isomorphe à un système induit par une rotation irrationnelle, et l'autre pas (voir aussi [55]). Ce travail constituait une première approche de la question qui avait initié ces recherches : y a-t-il des systèmes dynamiques gaussiens qui soient de rang 1 ?

4.1 Gaussiens et rang 1

La question de l'existence de systèmes gaussiens de rang 1 est tout à fait naturelle lorsque l'on met en parallèle les propriétés des systèmes de rang 1, et celles d'une classe particulière de systèmes gaussiens appelés *gaussiens-Kronecker*.

Un gaussien-Kronecker est un système dynamique gaussien dont la mesure spectrale γ est diffuse, et concentrée sur $K \cup (-K)$, où K est un *ensemble de Kronecker* dans $[0, \pi]$. Rappelons qu'une partie K de $[-\pi, \pi[$ est un *ensemble de Kronecker* si, pour toute fonction continue $f : K \longrightarrow S^1$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier h tel que

$$\sup_{x \in K} \left| f(x) - e^{ihx} \right| \leq \varepsilon.$$

Notons qu'un ensemble de Kronecker est toujours de mesure de Lebesgue nulle ; par conséquent, un gaussien-Kronecker est toujours d'entropie nulle. De plus, puisqu'on prend γ diffuse, un gaussien-Kronecker est toujours ergodique. Les gaussiens-Kronecker partagent aussi avec les rang 1 deux propriétés beaucoup plus rares : le spectre simple L^p pour $1 \leq p < +\infty$ et le "Weak-Closure Theorem" (voir [22] et [64]). Mais l'intérêt principal suscité par les gaussiens-Kronecker réside dans leur étonnante propriété de stabilité spectrale, démontrée dans [13] : dès qu'un système $(Y, \mathscr{B}, \nu, S)$ est *spectralement* isomorphe à un gaussien-Kronecker $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$, c'est-à-dire si l'action de l'opérateur $f \longmapsto f \circ S$ sur $L^2(\nu)$ est isomorphe à celle de $g \longmapsto g \circ T$ sur $L^2(\mu)$, les deux systèmes sont automatiquement isomorphes. Cette stabilité spectrale est partagée avec les systèmes à spectre discret, qui sont justement de rang 1 ([7]). Enfin, mentionnons le fait que le système gaussien lâchement Bernoulli construit dans [55] est précisément un gaussien-Kronecker ; or la lâche-bernoullicité est nécessaire pour être de rang 1.

S. Ferenczi avait annoncé dans [11] la construction d'un gaussien-Kronecker de rang 1, ce qui lui permettait notamment d'en déduire avec M. Lemańczyk que le rang n'est pas un invariant spectral (voir [12]). Au vu des propriétés des gaussiens-Kronecker mentionnées ci-dessus, ce résultat ne paraissait pas tellement surprenant ; malheureusement, une erreur découverte dans sa preuve relança la question de l'existence d'un tel système, à la fois gaussien et de rang 1.

Finalement, en dépit des troublantes ressemblances entre ces deux classes de systèmes dynamiques, l'intersection de la classe des gaussiens et celle des rang 1 s'avère être vide ! En fait, le résultat obtenu dans [58] est même un peu plus fort : un système dynamique gaussien n'est jamais de *rang 1 local*. Le rang 1 local est une propriété plus faible que le rang 1, qui suffit pour obtenir la lâche-bernoullicité et l'entropie nulle, et qui peut s'énoncer ainsi : un système est de rang 1 local si on peut le construire par découpage et empilage de telle manière qu'à chaque étape, une seule tour suffise à couvrir une partie substantielle de l'espace (c'est-à-dire une partie de mesure au moins θ, où $\theta > 0$ est fixé une fois pour toutes).

Mais l'histoire entre gaussiens et rang 1 ne s'arrête pas là. Il reste en particulier une question profonde et difficile : un système gaussien et un système de rang 1 sont-ils toujours *disjoints* ? Même des versions très affaiblies de cette question sont encore largement ouvertes. On ne sait pas, par exemple, s'il existe des facteurs de systèmes gaussiens qui soient de rang 1. Le problème se pose même pour des facteurs dont la structure est extrêmement simple, tel le facteur pair décrit au paragraphe suivant.

4.2 Facteurs des gaussiens

L'étude des facteurs des systèmes gaussiens en général est extrêmement complexe ; mais certains types de facteurs des systèmes gaussiens, qui existent quelle que soit la mesure spectrale du processus qui l'engendre, se laissent plus facilement analyser.

D'une part, on trouve toujours dans un système dynamique gaussien un continuum de facteurs eux-mêmes engendrés par un processus gaussien : pour toute mesure η symétrique et absolument continue par rapport à la mesure spectrale γ du processus gaussien engendrant le système, il existe un processus gaussien $(Y_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ de mesure spectrale η avec $Y_p = Y_0 \circ T^p$. Ce processus engendre donc un facteur *gaussien* $\mathscr{F}_\eta$ du système initial, et la structure de ces facteurs est remarquablement simple à décrire. Ainsi par exemple, si η_1 et η_2 sont mutuellement singulières, $\mathscr{F}_{\eta_1}$ et $\mathscr{F}_{\eta_2}$ sont indépendants et engendrent le facteur $\mathscr{F}_{\eta_1+\eta_2}$. En particulier, si η n'est pas équivalente à γ, le facteur gaussien $\mathscr{F}_\eta$ est un facteur strict du système, et il admet comme complément indépendant un autre facteur gaussien. Ces facteurs gaussiens s'interprètent assez bien dans le modèle de transformation de la trajectoire brownienne plane : ils correspondent aux tribus engendrées par des “morceaux” de la trajectoire brownienne. Par exemple, pour $a \in [0,\pi]$, soit η la mesure absolument continue par rapport à γ donnée par $d\eta \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{1}_{[-a,a]} d\gamma$; si on note $t \stackrel{\text{déf}}{=} \gamma([-a,a]) \in [0,1]$, le facteur $\mathscr{F}_\eta$

est la tribu engendrée par la partie de la trajectoire correspondant à l'intervalle de temps $[0, t]$, et il admet comme complément indépendant le facteur gaussien engendré par les $B_s - B_t$, $t \leq s \leq 1$.

D'autre part, il existe dans tout système dynamique gaussien un autre type de facteur appelé *facteur compact*, dont le représentant le plus élémentaire (mais néanmoins non trivial) est le *facteur pair* : il est constitué des parties F dans $\mathscr{A}$ qui sont invariantes par la symétrie $S\ :\ (x_p)_{p\in\mathbb{Z}} \longmapsto (-x_p)_{p\in\mathbb{Z}}$. (On suppose ici le système défini sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, les x_p étant les coordonnées du processus gaussien générateur.) En général, un facteur compact est l'ensemble des F mesurables qui sont invariants par toute transformation S dans Γ, où Γ est un groupe compact d'automorphismes de l'espace qui commutent avec T et qui laissent globalement invariant le sous-espace gaussien du processus générateur.

Les facteurs compacts existant dans tout système dynamique gaussien T, ils existent en particulier dans les facteurs gaussiens de T. On appelle alors *facteur classique* du système gaussien T tout facteur compact d'un facteur gaussien de T. M. Lemańczyk, F. Parreau et J.P. Thouvenot ont présenté dans [32] une classe particulière de systèmes gaussiens, qui ne possèdent pas d'autres facteurs que ces facteurs classiques. Ces systèmes gaussiens sont appelés *GAG* (pour "Gaussiens à Autocouplages Gaussiens"). Ils sont caractérisés par la propriété suivante : pour chaque autocouplage ergodique λ du système, les deux espaces gaussiens marginaux engendrent dans $L^2(\lambda)$ un sous-espace gaussien. Tout système gaussien à spectre simple (en particulier tout gaussien-Kronecker) est GAG.

Utilisant la propriété que les facteurs d'un GAG sont réduits aux seuls facteurs classiques, un travail réalisé en collaboration avec A. Iwanik, M. Lemańczyk et J. de Sam Lazaro [23] en déduit quelques conséquences surprenantes concernant les facteurs engendrés par un nombre fini de coordonnées du processus gaussien. En effet, on y prouve que dans un système gaussien général, défini par le processus gaussien (X_p), le facteur engendré par la variable aléatoire $f(X_{p_1}, \ldots, X_{p_m})$ non constante est

– ou bien $\mathscr{A}$ tout entière,
– ou bien le facteur pair (mais ce n'est possible que si f est paire),
– ou bien un facteur non classique.

En corollaire, si T est GAG, toute fonction non paire d'un nombre fini de coordonnées du processus est génératrice. Par exemple, dans le cas GAG, la tribu engendrée par les signes des X_p est $\mathscr{A}$ toute entière ! Par ailleurs, ce même théorème permet de donner un exemple explicite de facteur non classique pour un gaussien d'entropie nulle (non GAG évidemment).

5 Induction et propriétés spectrales

Une autre suite naturelle des travaux sur les systèmes gaussiens effectués dans [53] consistait à utiliser les techniques développées pour la construction de gaussiens lâchement et non lâchement Bernoulli sur le thème suivant : quelles propriétés spectrales peut-on ou ne peut-on pas induire à partir d'une transformation donnée ? Autrement dit, lorsque l'on change l'ensemble A sur lequel on induit un nouveau système, comment varient les propriétés spectrales de la transformation T_A ?

Rappelons que les *propriétés spectrales* d'un système dynamique sont celles que l'on peut observer sur l'action de l'opérateur unitaire $U_T : f \longmapsto f \circ T$ sur $L^2(\mu)$. L'ergodicité, le mélange faible et le mélange sont des exemples de telles propriétés. Or, si l'ergodicité est toujours conservée par passage à un système induit, de nombreuses constructions prouvent que tout est possible au niveau du mélange. Ainsi, la théorie de l'équivalence développée dans [40] permet de voir que les systèmes lâchement Bernoulli d'entropie nulle (parmi lesquels on trouve une multitude d'exemples mélangeants) induisent n'importe quelle rotation irrationnelle. Inversement, Friedman et Ornstein ont montré que tout système ergodique induit un système mélangeant [14].

L'étude de l'action de l'opérateur $U_T : f \longmapsto f \circ T$ sur $L^2(\mu)$ mène naturellement à la détermination des *mesures spectrales* des éléments de $L^2(\mu)$. Rappelons que pour tout $f \in L^2(\mu)$, la mesure spectrale de f (sous-entendu sous l'action de T) est l'unique mesure positive finie sur $[-\pi, \pi[$ dont les coefficients de Fourier sont donnés par

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{\sigma_f}(p) \stackrel{\text{déf}}{=} \langle f \,,\, f \circ T^p \rangle_{L^2(\mu)} .$$

5.1 Une mesure spectrale impossible à induire par une rotation irrationnelle

Le travail présenté maintenant part de l'idée suivante : utiliser les propriétés très fortes des gaussiens-Kronecker pour montrer qu'il existe une mesure finie continue sur $[-\pi, \pi[$ qui ne peut pas être la mesure spectrale d'un $f \in L^2(\mu)$ si T est lâchement Bernoulli. Ainsi, cette mesure spectrale ne pourrait jamais être obtenue par induction à partir d'une rotation irrationnelle.

L'argument essentiel pour arriver au résultat voulu tient dans le théorème de Foias et Stratila [13], qui affirme que si T est ergodique, et si la mesure spectrale σ_f d'un $f \in L^2(\mu)$ est symétrique et concentrée sur $K \cup (-K)$ où K est un ensemble de Kronecker, alors le facteur engendré par f est déterminé à isomorphisme près : c'est le gaussien-Kronecker de mesure spectrale σ_f. Il reste alors à construire un gaussien-Kronecker qui n'est pas lâchement Bernoulli, donc qui ne peut jamais être facteur d'une transformation induite par une rotation irrationnelle.

Les arguments utilisés dans [55] pour montrer qu'un certain système gaussien d'entropie nulle n'est pas lâchement Bernoulli ne semblaient *a priori* pas pouvoir être rendus compatibles avec la construction standard d'une mesure portée par un ensemble de Kronecker. En effet, la négation de la lâche-Bernoullicité repose sur l'indépendance de grands blocs de coordonnées du processus gaussien générateur, indépendance qui est obtenue en utilisant une forte périodicité de la mesure spectrale. Or, la construction habituelle d'un ensemble de Kronecker consiste précisément à éviter toute périodicité dans le support de la mesure !

Le point clé pour l'obtention d'un gaussien-Kronecker non lâchement Bernoulli est donc la présentation d'une nouvelle façon de construire un ensemble de Kronecker qui s'accorde avec la périodicité demandée pour le support de la mesure. Cette construction originale de l'ensemble de Kronecker est exposée dans [57]. Des arguments similaires à ceux de [55] sont repris ensuite pour établir que le gaussien-Kronecker obtenu par cette méthode n'est effectivement pas lâchement Bernoulli.

La conclusion de ce travail est donc la suivante : il existe une mesure positive finie sur $[-\pi, \pi[$ qui ne peut pas être obtenue comme mesure spectrale par induction sur une rotation irrationnelle, ou sur tout autre système lâchement Bernoulli. À l'inverse, le résultat évoqué au prochain paragraphe montre que la mesure de Lebesgue peut être obtenue comme mesure spectrale par induction sur n'importe quel système ergodique.

5.2 Induction du spectre de Lebesgue

Le *type spectral maximal* de T est la mesure positive σ_T (définie à l'équivalence près) pour laquelle il existe $f \in L^2(\mu)$ vérifiant $\sigma_f = \sigma_T$, mais telle que $\sigma_g \ll \sigma_T$ pour tout $g \in L^2(\mu)$. On dit que le système a *spectre de Lebesgue* si son type spectral maximal est la mesure de Lebesgue sur $[-\pi, \pi[$. Dans ce cas, le théorème de Riemann-Lebesgue assure que pour tout $f \in L^2$ de moyenne nulle, $\widehat{\sigma_f}(n) \longrightarrow 0$ quand $|n| \longrightarrow +\infty$, ce qui entraîne le mélange. Un lien spectaculaire entre la théorie de l'entropie et la théorie spectrale est obtenu par le résultat suivant : tout *K-système* (*i.e.* tout système ne possédant pas de facteur d'entropie nulle, comme par exemple des schémas de Bernoulli) a spectre de Lebesgue. Mais il existe aussi des systèmes d'entropie nulle qui ont spectre de Lebesgue, comme par exemple le flot horocyclique.

Comme déjà dit précédemment, on sait depuis la publication de [14] que dans tout système ergodique on peut trouver un ensemble A de mesure strictement positive (en fait arbitrairement proche de 1 si on veut !) tel que la transformation T_A induite par T sur A soit mélangeante. Mais la preuve du mélange pour T_A donnée par Friedman et Ornstein n'apporte aucune indication sur le type spectral maximal de la transformation induite. Il était dès lors naturel de se demander si on pouvait toujours, à partir d'une transformation ergodique quelconque, induire une transformation possédant une propriété plus forte que le mélange comme le spectre de Lebesgue. De plus, on pouvait déjà déduire de résultats connus que T induit le spectre de Lebesgue dans les deux situations suivantes à la fois assez éloignées et assez générales : d'une part si T est d'entropie strictement positive, car dans ce cas T induit un K-système (voir [41]), d'autre part si T est d'entropie nulle et lâchement Bernoulli (par exemple si T est une rotation irrationnelle), car le flot horocyclique est lui-même d'entropie nulle et lâchement Bernoulli (voir [44]).

En fait, ce résultat peut effectivement être étendu à n'importe quel système ergodique. La construction de l'ensemble A tel que T_A a spectre de Lebesgue, publiée dans [56], s'inspire d'un résultat de Meilijson [35] à propos de certains produits gauches. On considère un schéma de Bernoulli S sur l'espace $\Omega \stackrel{\text{déf}}{=} \{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ dans lequel "1" apparaît avec probabilité $1-\delta$ et "2" avec probabilité δ (δ est un réel strictement positif proche de 0). Un système ergodique $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$

étant donné, on définit sur l'espace $\Omega \times X$ le produit gauche $\tilde{T}$ par

$$\tilde{T}(\omega, x) \stackrel{\text{déf}}{=} (S\omega, T^{\omega_0}x)$$

(où ω_0 est la coordonnée d'indice 0 de ω). Le travail de Meilijson prouve qu'un tel produit gauche est toujours un K-système, en particulier il a toujours spectre de Lebesgue. Or, il est assez facile d'imiter le comportement d'un tel produit gauche (sur un intervalle de temps fini, mais arbitrairement long) en induisant le système T sur un ensemble A obtenu en détruisant une proportion δ d'étages d'une tour de Rokhlin très grande. Une fonction f de moyenne nulle étant donnée dans $L^2(\mu)$, il est donc possible en induisant sur un ensemble A de mesure $1-\delta$ d'approcher aussi bien que l'on veut la mesure spectrale qu'aurait f dans le produit gauche présenté ci-dessus, et dont on montre qu'elle est équivalente à la mesure de Lebesgue. En itérant ce procédé, on peut contrôler assez facilement les densités obtenues à chaque étape pour obtenir à la limite une transformation induite qui a spectre de Lebesgue.

Une question naturelle sur cette construction, mais à laquelle il semble bien difficile de répondre, est la suivante : peut-on en même temps contrôler la multiplicité spectrale de la transformation induite ? L'un des problèmes les plus résistants en théorie ergodique est en effet celui-ci, attribué à Banach : existe-t-il un système dynamique à spectre de Lebesgue simple ? Autrement dit, est-il possible que l'espace $L^2(\mu)$ possède une base orthonormale de la forme $(f \circ T^k)_{k\in\mathbb{Z}}$? Bien sûr, si l'on part d'un système d'entropie positive, toute transformation induite reste d'entropie positive et ne peut donc pas prétendre au spectre simple ; mais même si le système initial a spectre simple, il ne semble pas évident de pouvoir aussi maîtriser la multiplicité spectrale du système induit.

6 Facteurs et produits gauches en entropie positive

L'étude de la structure des systèmes dynamiques d'entropie positive commence par l'exhibition, dans un système dynamique quelconque, de facteurs particuliers liés à l'entropie. D'une part, tout système $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ possède un facteur d'entropie nulle maximal, appelé son *facteur de Pinsker* et noté $\Pi(T)$, dans lequel se trouvent toutes les partitions $\mathscr{P}$ telles que le processus $(\mathscr{P}, T)$ soit d'entropie nulle. Il se peut que $\Pi(T)$ soit réduit à la tribu triviale ; on dit alors que T est un *K-système*, c'est le cas par exemple des schémas de Bernoulli. D'autre part, Sinaï a montré en 1964 qu'un système dynamique d'entropie a possédait comme facteur tout Bernoulli d'entropie $\leq a$. Comme un K-système est toujours disjoint d'un système d'entropie nulle, on peut en déduire que tout système possède comme facteur le produit direct de son facteur de Pinsker (d'entropie nulle) et d'un schéma de Bernoulli de même entropie que T. La situation la plus simple est donc le produit d'un système d'entropie nulle par un Bernoulli ; mais la situation générale ne se limite évidemment pas à cette possibilité, ne serait-ce qu'à cause de l'existence de K-systèmes qui ne sont pas des schémas de Bernoulli. Une conjecture formulée par Pinsker en 1960 suggérait alors que tout système soit le produit direct de son facteur de Pinsker avec un K-système. Mais plusieurs contre-exemples donnés par Ornstein [37, 38] montrent que tous les systèmes dynamiques ne vérifient pas cette propriété, appelée *propriété de Pinsker*.

J.P. Thouvenot introduisit alors une propriété un peu plus faible : on dit que le système $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ vérifie la *propriété de Pinsker faible* si pout tout $\varepsilon > 0$ on peut écrire le système comme le produit direct d'un facteur d'entropie inférieure à ε et d'un schéma de Bernoulli. Bien qu'aucune raison n'incite à penser que tout système vérifie la propriété de Pinsker faible, il n'y a pas à ce jour d'exemple connu de système qui ne la satisfasse pas.

Les recherches que j'ai entreprises dans ce domaine visaient au départ à étudier cette propriété de Pinsker faible pour une classe de K-systèmes non Bernoulli, contenant en particulier des exemples différentiables, obtenus en effectuant un produit gauche sur la base d'un schéma de Bernoulli (voir [25, 49]) : si $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ est un schéma de Bernoulli et $(S^t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un flot agissant sur l'espace de Lebesgue $(Y, \mathscr{B}, \nu)$, chaque fonction mesurable f de X dans $\mathbb{R}$ permet de définir sur $X \times Y$ le produit gauche $T_f \ : \ (x, y) \longmapsto (Tx, S^{f(x)}y)$, qui préserve la mesure produit $\mu \otimes \nu$.

6.1 Facteurs des processus quasi-Markov

Pour aborder la question de la propriété de Pinsker de ces produits gauches, on est naturellement mené à étudier le comportement d'un schéma de Benoulli relativement à l'un de ses facteurs. Ce problème pourrait se formuler ainsi : il est très simple de décrire quels sont les systèmes dynamiques qui apparaissent comme facteurs d'un schéma de Bernoulli, puisque la théorie d'Ornstein nous montre que ce sont les schémas de Bernoulli d'entropie inférieure ou égale. En revanche, il peut être extrêmement complexe de dire comment un facteur donné s'imbrique dans le schéma de Bernoulli initial. Dans la situation la plus simple, on peut trouver un complément indépendant au facteur donné (on dit que ce facteur est *splittant*), autrement dit, le système de départ peut s'écrire comme le produit du facteur avec un autre schéma de Bernoulli. Il est bien utile de savoir que dans certains cas précis un facteur donné est splittant, notamment si l'on souhaite établir une propriété de Pinsker faible. C'est précisément l'objet de la théorie développée par Thouvenot [63], qui pour caractériser les facteurs splittants a reproduit l'analogue des travaux d'Ornstein relativement à un facteur donné. Utilisant les résultats de Thouvenot, un théorème donné par M. Rahe [43] affirme que si le facteur du système est engendré par une partition ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées d'un processus de Markov générateur, alors ce facteur est splittant (à une extension finie près).

Ce résultat de Rahe a pu être étendu à la fois à une classe plus large de processus que les processus de Markov, et à une condition plus faible sur la partition génératrice du facteur, en adaptant une propriété appelée "quasi-Bernoulli" introduite et étudiée par F. Ledrappier [30]. Un processus stationnaire $(X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ à valeurs dans un alphabet fini est dit *quasi-Bernoulli* si sa loi μ est équivalente au produit des lois marginales de son passé $(X_p)_{-\infty<p\leq -1}$ et de son futur $(X_p)_{0\leq p<+\infty}$ (notées respectivement $\mu|_{-\infty}^{-1}$ et $\mu|_{0}^{+\infty}$).

L'adaptation mineure de cette propriété proposée dans [50] consiste à demander simplement l'absolue continuité de μ par rapport au produit $\mu|_{-\infty}^{-1} \otimes$

$\mu|_0^{+\infty}$, ce qui permet d'inclure tous les processus de Markov, même si certaines probabilités de transition sont nulles. Un processus vérifiant $\mu \ll \mu|_{-\infty}^{-1} \otimes \mu|_0^{+\infty}$ sera dit *quasi-Markov*. Outre les processus de Markov de tout ordre fini, cette classe englobe également les processus dont la loi est une mesure de Gibbs au sens défini par R. Bowen dans [2].

À cause de l'affaiblissement de la propriété proposée par Ledrappier, il n'est plus vrai que le système dynamique engendré par un quasi-Markov est toujours isomorphe à un schéma de Bernoulli, mais on montre qu'il est toujours isomorphe au produit direct d'une permutation sur un ensemble fini avec un schéma de Bernoulli. La preuve de ce résultat utilise la notion de quasi-Markov *relativement à un facteur donné*, grâce à laquelle on obtient aussi le résultat suivant, généralisant celui de Rahe.

Considérons un processus $(X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ quasi-Markov. Un facteur $\mathscr{F}$ du système dynamique $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ engendré par (X_p) est dit *finitaire à temps de codage d'espérance finie* s'il est engendré par une partition finie $\mathscr{Q}$ vérifiant : pour μ-presque tout x, il existe un plus petit entier $m(x) \geq 0$ tel que, pour tout point y,

$$\Big[\big(X_{-m(x)}(y), \ldots, X_{m(x)}(y)\big) = \big(X_{-m(x)}(x), \ldots, X_{m(x)}(x)\big)\Big] \Longrightarrow \mathscr{Q}(y) = \mathscr{Q}(x),$$

et si

$$\int_X m(x)\, d\mu \;<\; +\infty.$$

Si $\mathscr{F}$ est un tel facteur de T, alors il existe une *extension finie* de $\mathscr{F}$, c'est-à-dire un facteur $\tilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \vee \mathscr{R}$ où $\mathscr{R}$ est une partition finie de X, qui est splittant. Un exemple d'application de ce résultat concerne le cas d'un facteur d'un automorphisme hyperbolique du tore engendré par une partition assez régulière.

Les résultats obtenus dans ce domaine tendent donc à montrer que des hypothèses de "régularité" d'une partition engendrant le facteur par rapport aux coordonnées d'un bon processus de base entraînent un comportement assez simple du système relativement au facteur considéré.

6.2 Cohomologie dans un schéma de Bernoulli

À la suite de ces travaux sur les processus quasi-Markov, et toujours dans le but d'étudier la propriété de Pinsker faible pour les produits gauche à base Bernoulli, une idée naturelle consistait à tenter de se ramener au cas où la fonction f était précisément une fonction finitaire à temps de codage d'espérance finie (FTCEF) du processus i.i.d. engendrant le schéma de Bernoulli. Notons $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ ce schéma de Bernoulli, où $X = E^{\mathbb{Z}}$, E étant l'alphabet fini dans lequel le processus prend ses valeurs et μ la loi du processus (donc une mesure produit) sur X. Deux fonctions mesurables f et g de X vers $\mathbb{R}$ sont dites *cohomologues* s'il existe une fonction mesurable $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ appelée *fonction de transfert* telle que, pour μ-presque tout x,

$$g(x) \;=\; f(x) + \varphi(x) - \varphi(Tx).$$

Comme le produit gauche ne change essentiellement pas si on remplace la fonction f par une fonction qui lui est cohomologue, l'espoir était de pouvoir montrer que toute fonction höldérienne f était cohomologue à une fonction FTCEF.

Malheureusement, les résultats obtenus par la suite et exposés dans [59] permettent de trouver un contre-exemple à cette conjecture. Un nouvel invariant de la cohomologie y est présenté, obtenu comme suit : pour $x \in X$ et a fixé dans E, on note $x^{(a)}$ le point de X ayant les mêmes coordonnées que x, exceptée celle d'indice 0 qui est remplacée par a :

$$\forall p \neq 0, \quad x_p^{(a)} \stackrel{\text{déf}}{=} x_p, \quad \text{et} \quad x_0^{(a)} \stackrel{\text{déf}}{=} a.$$

Si f est une fonction mesurable de X vers $\mathbb{R}$, et si pour un point $x \in X$ l'expression

$$\Delta_a^n f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=-n}^{n} \Big(f(T^k x) - f(T^k x^{(a)}) \Big)$$

a une limite quand $n \longrightarrow +\infty$, on note $\Delta_a f(x)$ cette limite. En fait, il suffit d'une condition un peu plus faible pour pouvoir définir sans ambiguïté $\Delta_a f(x)$: si on peut trouver une sous-suite d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ de densité 1 telle que $\Delta_a^{n_k} f(x)$ converge, on pose

$$\Delta_a f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{k \longrightarrow +\infty} \Delta_a^{n_k} f(x).$$

Cette limite existe automatiquement dès que f est assez régulière (höldérienne par exemple). Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable telle que, pour une lettre $a \in A$, $\Delta_a f(x)$ soit bien défini pour μ-presque tout x, on montre alors que pour toute fonction g cohomologue à f, $\Delta_a g(x)$ est bien défini pour μ-presque tout x et vérifie

$$\Delta_a g(x) = \Delta_a f(x).$$

Il est assez facile de vérifier que si g est FTCEF, alors $\Delta_a g(x)$ est bien défini pour μ-presque tout x, et ne peut prendre qu'un nombre dénombrable de valeurs. Or, on trouve une fonction höldérienne f telle que $\Delta_a f(x)$ prenne un continuum de valeurs, et qui par conséquent ne peut être cohomologue à une fonction FTCEF.

Si ces travaux ruinent tout espoir de se ramener par cohomologie aux facteurs engendrés par des fonctions FTCEF, ils fournissent néanmoins un nouveau critère de cohomologie dans la classe des fonctions höldériennes. En effet, on montre que si f et g sont deux fonctions höldériennes vérifiant, pour une lettre a et pour tout $x \in X$, $\Delta_a f(x) = \Delta_a g(x)$, alors f et g sont cohomologues.

7 Disjonction faible et T-facteurs

Disjonction faible

Les systèmes $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu, S)$ sont dits *faiblement disjoints* si quels que soient $f \in L^2(\mu)$ et $g \in L^2(\nu)$, il existe $X_0 \subset X$ et $Y_0 \subset Y$ avec $\mu(X_0) = \nu(Y_0) = 1$, tels que pour tout $x \in X_0$ et tout $y \in Y_0$, il y ait convergence quand $n \longrightarrow +\infty$ de la suite des moyennes ergodiques

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)g(T^k y).$$

La propriété de *disjonction faible* de systèmes dynamiques fut introduite par E. Lesigne et B. Rittaud, et présentée pour la première fois dans la thèse de Rittaud [46] sous le nom *propriété ergodique produit forte*, dans le but de l'appliquer à l'étude d'un problème ouvert bien connu de théorie ergodique : étant données deux transformations S et T préservant la mesure et qui commutent sur un espace probabilisé $(X, \mathscr{A}, \mu)$, est-il vrai que pour f et g dans L^2 la suite

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^n x)g(S^n x)\right)_{n>0}$$

converge pour μ-presque tout x ? Si les systèmes définis par S et T sont faiblement disjoints, la réponse à cette question est positive.

Utilisant le théorème de Jewett-Krieger, on peut toujours par isomorphisme se ramener au cas où S et T sont des transformations continues sur des espaces métriques compacts, ce qui permet notamment de considérer la convergence faible des suites de mesures de probabilité sur l'espace produit. Dans ce cadre, dire que S et T sont faiblement disjoints revient à affirmer l'existence de $X_0 \subset X$ et $Y_0 \subset Y$ avec $\mu(X_0) = \nu(Y_0) = 1$, tels que pour tout $x \in X_0$ et tout $y \in Y_0$, il y ait convergence faible de

$$\delta_n(x,y) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{(T^k x, S^k y)}.$$

Il est facile de montrer que si les systèmes S et T ergodiques sont disjoints, alors ils sont faiblement disjoints. L'idée consiste à utiliser le fait que si x et y sont bien choisis, par ergodicité de S et T les valeurs d'adhérence de la suite $(\delta_n(x,y))$ sont automatiquement des couplages de S et T ; si ces systèmes sont disjoints, il ne peut donc y avoir qu'une seule valeur d'adhérence à cette suite : la mesure produit.

Mais la réciproque n'est pas juste : un système dynamique T ne peut être disjoint de lui-même (sauf dans le cas trivial d'un espace réduit à un seul point), or il existe des exemples de systèmes dynamiques *faiblement auto-disjoints*, c'est-à-dire des exemples où T est faiblement disjoint de T. C'est le cas si T est à spectre discret, ou même quasi-discret (voir [46]), mais il existe aussi des exemples faiblement mélangeants comme la transformation de Chacon ou le flot horocyclique.

Transformations universelles et T-facteurs

Un système T qui est faiblement disjoint de tout système S est dit *universel*. Il est prouvé dans [46] que si T est à spectre quasi-discret, T est universel. Naturellement se pose donc la question suivante : un système T qui est faiblement auto-disjoint est-il toujours universel ?

Dans un travail en commun avec Lesigne et Rittaud [33], quelques éléments ont été développés pour tenter de répondre à ce problème. Comme on le voit dans le paragraphe précédent, l'étude de la faible disjonction de systèmes dynamiques est étroitement liée à celle de leurs couplages ; pour pouvoir aborder cette question des transformations universelles, nous avons donc naturellement été amenés à approfondir quelques idées de la théorie des couplage. Le lien entre l'existence d'un couplage non trivial de deux systèmes donnés et celle d'un facteur commun, mis en évidence par H. Furstenberg dans [15] puis précisé par un théorème publié dans [18] et [32], est à l'origine de la notion de *T-facteur* introduite dans [33].

Ce théorème affirme que si deux systèmes S et T ne sont pas disjoints, alors S a un facteur commun non trivial avec un couplage d'une famille dénombrable de copies de T. En s'inspirant de ce résultat, on appelle *T-facteur* de S tout facteur de S qui s'identifie ainsi à un facteur d'un couplage d'une famille dénombrable de copies du système T. Il est montré dans [33] que pour tous systèmes S et T, S possède toujours un T-facteur maximum $\mathscr{F}_T$ (c'est-à-dire un T-facteur qui contient tous les T-facteurs de S). De plus, si λ est un couplage de $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu, S)$, les tribus $\mathscr{A} \otimes \{\emptyset, Y\}$ et $\{\emptyset, X\} \otimes B$ sont indépendantes sous λ conditionnellement à $\{\emptyset, X\} \otimes \mathscr{F}_T$.

Ces résultats sur les T-facteurs permettent de relier l'étude de la faible disjonction de S et T à celle de T et de ses propres autocouplages. Plus précisément, on obtient les théorèmes suivants :

- Si T ergodique est faiblement disjoint de tout couplage ergodique d'une famille finie de copies de T, alors T est faiblement disjoint de tout système ergodique S.
- Si T ergodique est faiblement disjoint de lui-même à tout ordre $k \geq 2$, alors T est universel.

(On dit que *T est faiblement disjoint de lui-même à l'ordre k* si on peut trouver $X_0 \subset X$ de mesure 1, tel que pour $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in {X_0}^k$, la suite des probabilités $\delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ converge.)

Ces résultats n'apportent pas une réponse définitive à la question de savoir si faiblement auto-disjoint implique universel, mais ils permettent de montrer à la fois que la transformation de Chacon et le flot horocyclique sont universels.

Considérant que la disjonction de S et T entraîne leur faible disjonction, il était naturel de penser que la faible auto-disjonction de T pouvait être liée à l'absence d'autocouplages non triviaux pour T. Mais on montre dans [33] comment il est possible de construire une large famille de systèmes de rang 1 qui ne sont pas faiblement auto-disjoints, parmi lesquels on trouve des rang 1 mélangeants. Or, tout rang 1 mélangeant possède la propriété d'autocouplages minimaux (voir [28]). Les autocouplages minimaux n'entraînent donc pas la faible auto-disjonction.

Inversement, on ne sait pas quelles restrictions sur les autocouplages de T impose la faible auto-disjonction de T.

8 Plongement d'un automorphisme générique dans un flot

Propriétés des automorphismes génériques

Désignons ici par $(X, \mathscr{A}, \mu)$ le représentant canonique de la classe des espaces de Lebesgue non atomiques : X est l'intervalle $[0, 1]$ et μ la mesure de Lebesgue. L'ensemble $\Omega \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Aut}(X, \mathscr{A}, \mu)$ des automorphismes de cet espace de Lebesgue est un groupe pour la composition, muni d'une topologie dite *faible* qui en fait un groupe polonais. Une distance d engendrant cette topologie, et pour laquelle Ω est complet, peut être définie comme suit : pour tout $n \geq 1$, notons $\mathscr{P}_n$ la partition de $[0, 1]$ formée par les 2^n intervalles $[j/2^n, (j+1)/2^n[$, $j \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, et posons pour S et T dans Ω

$$d_n(S, T) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{A \in \mathscr{P}_n} \Big(\mu\left(T^{-1}A \setminus S^{-1}A\right) + \mu\left(TA \setminus SA\right) \Big),$$

puis

$$d(S, T) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} d_n(S, T).$$

Cette topologie faible est décrite dans le livre de P.R. Halmos [21], où apparaît aussi la notion de *généricité* pour les propriétés des automorphismes.

Rappelons qu'un sous-ensemble d'un espace topologique E est dit *générique* si il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses dans E. Lorsque E est polonais, tout sous-ensemble générique est dense.

Soit $\mathbf{P}$ une propriété susceptible d'être vérifiée par un automorphisme de $[0, 1]$. On dit qu'*un automorphisme générique de* Ω *vérifie* $\mathbf{P}$ si l'ensemble des automorphismes qui vérifient $\mathbf{P}$ est générique dans Ω.

L'étude des propriétés des automorphismes génériques a débuté avec Halmos et Rokhlin, qui ont établi respectivement qu'un automorphisme générique est faiblement mélangeant [20], mais n'est pas fortement mélangeant [47]. (La démonstration de ces deux résultats se retrouve dans le livre de Halmos [21].) Du travail de Katok et Stepin [26], on déduit aussi qu'un automorphisme générique est de rang 1 et rigide, ce qui implique en particulier que son commutant est non dénombrable (comme conséquence des résultats de King [27]).

Plus récemment, King a montré dans [29] qu'un automorphisme générique possède des racines de tout ordre $k \geq 1$ (pour tout entier $k \geq 1$, une racine d'ordre k de T est un automorphisme S tel que $S^k = T$). De ce résultat découle naturellement la question suivante, que King pose dans ce même article : est-ce qu'un automorphisme générique peut être plongé dans un flot ? Plus précisément : pour un automorphisme générique T, existe-t-il un *flot*, c'est-à-dire une famille $(T^t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'éléments de Ω telle que $t \longmapsto T^t$ soit un morphisme mesurable du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe Ω, vérifiant $T^1 = T$?

La recette de King

Pour montrer l'existence de racines d'un automorphisme générique, King a mis au point une méthode efficace pour établir la généricité d'une propriété abstraite **P** d'un automorphisme. Avec J. de Sam Lazaro, après avoir étudié en détail le travail de King, nous nous sommes aperçus que la même recette pouvait être employée pour répondre au problème du plongement dans un flot. Cette recette est basée sur quelques notions de topologie et de théorie descriptive des ensembles, et comporte deux ingrédients principaux :

– la loi 0-1 pour les propriétés dynamiques ;
– la notion de locale densité et le lemme de Dougherty.

Le premier ingrédient s'applique à une famille précise de propriétés abstraites d'un système dynamique appelées *propriétés dynamiques*. Une propriété **P** est dite *dynamique* si elle est invariante par isomorphisme de systèmes ; autrement dit : si T et S sont conjugués dans Ω et si T vérifie **P** alors S vérifie aussi **P**. On demande également que l'ensemble des T qui vérifient **P** soit raisonnablement mesurable dans Ω ; sans entrer dans les détails, disons qu'il suffit que cet ensemble soit *analytique*, c'est-à-dire image continue d'un espace polonais dans Ω. La loi 0-1 pour les propriétés dynamiques, montrée par Glasner et King [17], dit que si **P** est une telle propriété, alors l'ensemble des automorphismes qui vérifient **P** est soit générique, soit maigre (son complémentaire est générique).

Le second ingrédient donne une condition suffisante pour qu'une partie A d'un espace topologique E, qui s'écrit $A = f(F)$ où F est un espace polonais et f une application continue, ne puisse pas être maigre dans E. Cette condition utilise la notion de point *localement dense pour* f : un point x de F est dit localement dense pour f si pour tout voisinage V de x, $f(V)$ est dense dans un voisinage de $f(x)$. Un lemme établi par R. Dougherty "sur mesure" pour le travail de King dit que si l'ensemble des points localement denses pour f est dense dans F, alors $f(F)$ ne peut pas être maigre dans E.

La recette pour montrer qu'un automorphisme générique vérifie une certaine propriété **P** peut alors être décrite ainsi :

– vérifier que **P** est invariante par isomorphisme,
– écrire l'ensemble des automorphismes qui vérifient **P** sous la forme $f(F)$ où F est un espace polonais et f une application continue de F das Ω,
– montrer que l'ensemble des points localement denses pour f est dense dans F.

Application au plongement dans un flot

L'application de la méthode de King pour montrer qu'un automorphisme générique est plongeable dans un flot est assez naturelle. Notons F l'ensemble des flots, et munissons-le de la topologie définie par la distance

$$d_F\Big((S^t),(T^t)\Big) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t\in[0,1]} d(S^t,T^t),$$

où d est la distance définie précédemment sur Ω. F est alors un espace polonais, et l'ensemble des automorphismes plongeables dans un flot s'écrit évidemment $f(F)$ où f est l'application continue $(T^t) \longmapsto T^1$. Il suffit ensuite de vérifier la densité dans F des flots localement denses pour f, ce qui se fait en considérant la classe des flots dont le temps 1 est isomorphe à une rotation irrationnelle.

Les détails de la preuve sont publiés dans [62], où nous montrons également qu'au contraire d'une action de $\mathbb{Z}$, une action du groupe dyadique n'est pas génériquement plongeable dans un flot.

De nombreuses questions se posent autour des propriétés des automorphismes génériques. En revenant sur un thème exposé précédemment, on peut par exemple se demander si un automorphisme générique est faiblement auto-disjoint. Mais pour rester dans le domaine du plongement dans un flot, on peut aussi poser le problème suivant : un automorphisme générique peut-il être plongé dans une action d'un groupe abélien "plus gros" que $(\mathbb{R}, +)$ (par exemple $(\mathbb{R}^d, +)$ pour un $d > 1$) ? Existe-t-il un groupe abélien maximal dans une action duquel on peut insérer un automorphisme générique ?

9 De la transformation de Chacon aux martingales

Il a déjà été plusieurs fois question dans ce document du système dynamique défini par la transformation de Chacon. Cette transformation est en effet devenue un objet presque mythique en théorie ergodique : présentée (sous une forme un peu différente de celle exposée ici) par Chacon en 1969 pour donner un exemple explicite de système faiblement mélangeant non mélangeant [4], la simplicité de sa construction ne laissait pas présager qu'on lui découvrirait autant d'autres qualités extraordinaires.

Ainsi, la transformation de Chacon est probablement l'exemple le plus élémentaire de système à autocouplages minimaux, propriété découverte en 1980 par Del Junco, Rahe et Swanson [9], ce qui implique qu'il n'a pas de facteur non trivial, et pas de racines.

Une autre propriété peu commune de la transformation de Chacon concerne la convergence des moyennes ergodiques dans son carré cartésien : A. Del Junco et M. Keane [8] ont montré que si T est la transformation de Chacon, les mesures empiriques

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{(T^k x, T^k y)}$$

convergent pour *tous* points x et y en dehors d'un ensemble dénombrable. C'est d'ailleurs cette propriété qui permet de montrer la faible disjonction de la transformation de Chacon avec n'importe quel autre système dynamique.

C'est justement sur son carré cartésien que se pose l'une des questions les plus importantes restant ouvertes à propos de la transformation de Chacon : ce carré cartésien est-il lâchement Bernoulli ? Étant lui-même de rang 1, le système dynamique défini par la transformation de Chacon est *a fortiori* lâchement Bernoulli ; mais il est bien connu que le carré cartésien d'un rang 1 peut ne pas être lâchement Bernoulli (voir un contre-exemple donné dans [40]). À l'inverse, on sait aussi construire des systèmes de rang 1 dont le carré cartésien est lâchement Bernoulli, en fait même de rang 1 local (voir notamment le rang 1 de Katok, décrit par exemple dans [16]).

En fait, il semble naturel de conjecturer que le carré cartésien de la transformation de Chacon *n'est pas* lâchement Bernoulli. Une première raison qui incite à penser cela est que ce carré cartésien n'est pas de rang 1 local : en fait, on peut montrer que le produit direct de la transformation de Chacon avec n'importe quel autre système dynamique apériodique ne peut jamais être de rang 1 local (voir [31]). Une seconde raison tient dans certaines analogies qui peuvent être observées entre la dynamique de la transformation de Chacon et celle du *flot horocyclique*, étudié notamment par M. Ratner [44, 45]. Dans ces deux travaux, il est prouvé d'une part que le flot horocyclique est lâchement Bernoulli, et d'autre part que son carré cartésien ne l'est pas.

Essayons en quelques lignes d'exposer certains arguments essentiels pour tenter de prouver la non-lâche Bernoullicité du carré cartésien de la transformation de Chacon. Si $T \times T$ était lâchement Bernoulli, cela se caractériserait de la façon suivante : appelons $\mathscr{P}$ la partition de X définie par une tour obtenue à une étape fixée de la construction de la transformation de Chacon; étant donnés deux couples (x, y) et (x', y') dans $X \times X$ et un entier L assez grand, on pourrait trouver des entiers $0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq L-1$, et $0 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq L-1$ avec r/L proche de 1, tels que pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$, $\mathscr{P}(T^{i_k}x) = \mathscr{P}(T^{j_k}x')$, et $\mathscr{P}(T^{i_k}y) = \mathscr{P}(T^{j_k}y')$. (La réalisation de deux telles sous-suites (i_k) et (j_k) est traditionnellement appelée un *couplage* entre (x, y) et (x', y'), mais le terme "couplage" n'a pas ici la même signification que lorsque l'on parle de "couplages de systèmes dynamiques" !) Si on note $h(x)$ la hauteur d'un point x dans la tour définissant la partition $\mathscr{P}$, et si on pose

$$\Delta_h\Big((T^{i_k}x, T^{i_k}y), (T^{j_k}x', T^{j_k}y')\Big) \stackrel{\text{déf}}{=} h(T^{j_k}y') - h(T^{j_k}x') - \Big(h(T^{i_k}y) - h(T^{i_k}x)\Big),$$

on observe que le long d'un tel couplage on doit toujours avoir

$$\Delta_h\Big((T^{i_k}x, T^{i_k}y), (T^{j_k}x', T^{j_k}y')\Big) = 0. \tag{2}$$

Une première idée pour tenter de nier la lâche-bernoullicité de $T \times T$ consiste alors à choisir (x', y') en fonction de (x, y) de manière à pouvoir prouver la non-existence du couplage requis. Un choix simple consiste à prendre $(x', y') = (x, Ty)$, car dans ce cas les différences de hauteur dans la tour sont décalées de 1 au départ, et ce décalage perdure tant que $i_k = j_k$. Mais, contrairement à ce que l'on pourrait penser, il s'avère finalement que dans le carré cartésien de la transformation de Chacon on peut toujours construire un couplage entre (x, y) et (x, Ty). Cela implique même l'existence d'un couplage entre (x, y) et $(x, T^k y)$ pour n'importe quel entier k ! Ce résultat surprenant laisse présager de la difficulté à prouver que $T \times T$ n'est pas lâchement Bernoulli…

9.1 Vitesse de dispersion pour une classe de martingales

Une approche un peu différente, qui ne s'est malheureusement pas (encore ?) montrée fructueuse en ce qui concerne la non lâche-bernoullicité de $T \times T$, a toutefois conduit à l'obtention d'un résultat nouveau à propos du comportement en loi de certaines martingales. Le principe consiste à se donner *a priori* un couplage, c'est-à-dire deux suites d'indices (i_k) et (j_k) strictement croissantes et de densité proche de 1 entre 0 et $L - 1$, et à étudier ensuite pour un choix général des points (x,y) et (x',y') l'évolution de $\Delta_h\Big((T^{i_k}x,T^{i_k}y),(T^{j_k}x',T^{j_k}y')\Big)$ le long de ces suites. On cherche ici à exploiter le fait que, lorsque l'un des points x, y, x' ou y' passe dans un espaceur, cela induit un décalage d'une unité dans Δ_h. On est ainsi conduit à écrire $\Delta_h\Big((T^{i_k}x,T^{i_k}y),(T^{j_k}x',T^{j_k}y')\Big)$ en fonction de sa valeur initiale, et du nombre d'espaceurs rencontrés par chacun des quatre points. Dans cette écriture, il est possible de séparer les contributions de chacun des espaceurs apparaissant dans les étapes successives de la construction ; l'expression donnant $\Delta_h\Big((T^{i_k}x,T^{i_k}y),(T^{j_k}x',T^{j_k}y')\Big)$ en fonction de k ressemble alors à une somme d'accroissements de martingale, dont on souhaite ensuite montrer qu'elle ne peut pas se concentrer autour de 0.

C'est ainsi que l'étude du carré cartésien de la transformation de Chacon a pu conduire à examiner la *fonction de concentration* de certaines martingales. Rappelons que la fonction de concentration d'une variable aléatoire réelle X, introduite par Paul Lévy [34], est définie pour $s \geq 0$ par

$$Q(X,s) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}} P(x \leq X \leq x+s).$$

Le but était de trouver des conditions suffisantes sur les accroissements de la martingale (M_n) pour que la fonction de concentration de M_n tende vers 0 (pour un réel $s > 0$ fixé), ce qui empêche la loi de la martingale de se concentrer en 0.

On trouve facilement dans la littérature des résultats prouvant que sous certaines hypothèses, la fonction de concentration d'une martingale tend vers 0. Dans le cas où les accroissements sont indépendants et identiquement distribués, il est bien connu que $Q(M_n,s) = O(n^{-1/2})$ (voir par exemple [42] p. 49). Sans l'indépendance des accroissements, des théorèmes de type Berry-Esseen comme celui donné dans [19] p. 84 donnent également $Q(M_n,s) = O(n^{-\lambda})$ pour tout $\lambda < 1/4$, mais sous des hypothèses malheureusement loin d'être vérifiées dans le cadre de l'application envisagée. En fait, les conditions qui semblaient raisonnables pour obtenir le résultat de dispersion cherché, et apparemment pas trop éloignées de l'application au carré cartésien de la transformation de Chacon, sont les suivantes : en notant (X_n) les accroissements de la martingale (M_n) ($X_n = M_n - M_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$, avec $M_0 = 0$), et $\mathscr{F}_n$ la tribu engendrée par $X_1,\ldots,X_n$, on suppose que

– les accroissements sont bornés :

$$\exists M > 0,\ \forall n \geq 1,\ |X_n| \leq M; \tag{3}$$

– les variances conditionnelles des accroissements sont minorées :

$$\exists \beta > 0,\ \forall n \geq 0,\ \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2 \mid \mathscr{F}_n\right] \ \geq\ \beta^2 \quad \text{(p.s.)}. \tag{4}$$

On constate assez facilement que ces conditions sont trop faibles pour entraîner une quelconque convergence en loi de la martingale (M_n) ; aussi il semblait malaisé de traiter ce problème avec les outils habituellement utilisés pour l'obtention de résultats fins sur les lois asymptotiques.

Une formulation fonctionnelle du problème permet toutefois de répondre de manière presque élémentaire au problème de la dispersion de la classe de martingales vérifiant (3) et (4). On introduit la suite de fonctions $(q_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\forall n \geq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad q_n(t) \ \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{(M_n)\text{ vérifiant (3) et (4)}} P\Big(M_n \in [t-1, t+1]\Big).$$

On constate que la suite de fonctions (q_n) est entièrement déterminée par la donnée de q_0, qui n'est autre que $\mathbb{1}_{[-1,1]}$, et une relation de récurrence de la forme $q_{n+1} = \tau q_n$, où τ est un certain opérateur agissant sur les fonctions mesurables bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On peut facilement comparer la suite de fonctions (q_n) avec une autre suite satisfaisant la même relation de récurrence, mais pour une condition initiale différente qui permet des estimations plus aisées. On prouve ainsi le résultat suivant : si la martingale (M_n) satisfait (3) et (4), on a

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} P\Big(M_n \in [t-1, t+1]\Big) \ = \ O(n^{-\lambda}) \tag{5}$$

pour un réel $\lambda > 0$ dépendant de β et M.

Ce premier résultat encourageant ne pouvait de toute façon pas être appliqué directement à la transformation de Chacon, car dans ce cadre il n'est pas possible de minorer uniformément en n les variances conditionnelles. Mais des arguments similaires permettent aussi de traiter le cas où, au lieu de (4), on suppose simplement qu'il existe une suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$ de réels positifs (éventuellement nuls) tels que

$$\forall n \geq 0, \quad \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2 \mid \mathscr{F}_n\right] \ \geq \ \beta_{n+1}^2 \quad \text{(p.s.)}. \tag{6}$$

On obtient alors

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} P\Big(M_n \in [t-1, t+1]\Big) \ \leq \ K \exp\left(-\rho\left(\frac{\beta_1^2}{n} + \frac{\beta_2^2}{n-1} + \cdots + \frac{\beta_{n-1}^2}{2} + \beta_n^2\right)\right), \tag{7}$$

où $K > 0$ et $\rho > 0$ ne dépendent plus que de M. Les preuves détaillées de (5) et (7) ont été publiées dans [61].

L'obtention de ces résultats suscitèrent un grand espoir de pouvoir régler la question de la lâche Bernoullicité de Chacon$\times$Chacon. Malheureusement, deux obstacles s'opposent encore à leur application dans ce cadre : d'une part, l'estimation de la vitesse de dispersion de la martingale en fonction des paramètres β_j et M n'est pas suffisamment précise ; d'autre part l'expression donnant $\Delta_h\Big((T^{i_k}x, T^{i_k}y), (T^{j_k}x', T^{j_k}y')\Big)$ en fonction de k n'est pas *exactement* une martingale, et se ramener à une vraie martingale s'avère finalement poser beaucoup plus de difficultés que prévu.

9.2 Martingales bilatérales et processus fiables

On peut aussi évoquer ici une autre question liée aux martingales, complètement indépendante de l'étude précédente mais qui nous donnera l'occasion de parler à nouveau de la transformation de Chacon : celle de la convergence presque sûre des *martingales bilatérales* [60]. Le problème de départ est le suivant : dans un système dynamique engendré par un processus stationnaire

$(X_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ à valeurs dans un alphabet fini, on se donne un ensemble mesurable B. Puisque le processus (X_p) est générateur, la connaissance de tous les X_p, $p \in \mathbb{Z}$ permet théoriquement de savoir si l'événement B est réalisé. Mais en pratique, on ne peut pas connaître *tous* les X_p ; si on ne voit que les composantes $X_{-n}, X_{-n+1}, \ldots, X_{m-1}, X_m$ (m et n entiers ≥ 0), il est naturel d'estimer la réalisation de B à l'aide de l'espérance conditionnelle

$$M_{n,m}(B) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B \mid X_{-n}, X_{-n+1}, \ldots, X_{m-1}, X_m\right],$$

appelée *martingale bilatérale*. On s'attend à ce que plus m et n sont grands, plus on a d'informations sur le processus et meilleure sera cette estimation. Remarquons que si l'on fixe deux suites d'entiers (n_k) et (m_k) tendant vers l'infini, le théorème classique de convergence des martingales assure la convergence presque sûre de $M_{n_k,m_k}(B)$ vers $\mathbb{1}_B$, mais l'ensemble négligeable en-dehors duquel cette convergence a lieu dépend *a priori* du choix des suites (n_k) et (m_k). Étudier la convergence presque sûre de la martingale bilatérale $M_{n,m}(B)$ vers $\mathbb{1}_B$ quand m et n tendent vers l'infini revient à se demander si il est possible de trouver un ensemble négligeable en-dehors duquel la convergence ait lieu pour tout choix des suites (n_k) et (m_k). Comme le nombre de choix possibles pour les suites (n_k) et (m_k) n'est pas dénombrable, il se pourrait que cette convergence presque sûre n'ait pas lieu.

On peut vérifier que pour certains processus générateur (X_p), la martingale bilatérale $M_{n,m}(B)$ converge presque sûrement vers $\mathbb{1}_B$ quand m et n tendent vers l'infini, et ceci pour tout choix de B. Un tel processus (X_p) sera dit *fiable*. Parmi les exemples de processus fiables, on peut notamment citer :

– Les schémas de Bernoulli et les processus de Markov. Leur fiabilité découle d'un résultat de Cairoli [3], qui a montré la convergence presque sûre d'une martingale $M_{n_1,n_2,\ldots,n_d}$ indexée par $\mathbb{N}^d$ sous la condition que la filtration $\mathscr{F}_{n_1,n_2,\ldots,n_d}$ associée s'écrive comme un produit de d filtrations indépendantes (plus une condition d'intégrabilité automatiquement vérifiée dans le cas qui nous intéresse ici, puisque la martingale bilatérale $M_{n,m}$ est toujours bornée).
– Les processus générateurs d'une rotation irrationnelle sur le tore $\mathbb{T}^d$, construits à l'aide d'une partition finie qui est le produit de d partitions du tore de dimension 1 en un nombre fini d'intervalles. Leur fiabilité est cette fois une conséquence du théorème de Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund (voir par exemple [6], p. 50).
– Le processus générateur “naturel” de la transformation de Chacon, c'est-à-dire le processus défini par la partition de l'espace donnée à la première étape de la construction par découpage et empilage. Ici, la fiabilité est une conséquence d'une propriété assez spécifique vérifiée par le processus, qui dit essentiellement que si on conditionne par rapport à un passé de taille n, le nombre de futurs de taille n possibles est borné par une constante ne dépendant pas de n.

Mais, en dépit de cette variété d'exemples de processus fiables, on peut montrer aussi l'existence de processus non fiables. Par une méthode classique de construction de processus utilisant les tours de Rokhlin, on montre même le résultat suivant : dans tout système apériodique, on peut trouver un processus générateur non fiable !

L'existence de tels processus mène à la remarque paradoxale suivante : lorsque (X_p) est un processus non fiable, et B un ensemble mesurable pour lequel la martingale bilatérale $M_{n,m}(B)$ ne converge pas presque sûrement, on peut se demander s'il est possible de remplacer la probabilité conditionnelle de B sachant $X_{-n},\ldots,X_m$ par une autre fonction $f_{n,m}$ qui soit mesurable par rapport aux variables $X_{-n},\ldots,X_m$, et telle que

$$f_{n,m} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} \mathbb{1}_B \qquad (\mu\text{-p.s.}).$$

Or, une telle fonction est très facile à trouver : il suffit de poser $k_{m,n} \stackrel{\text{déf}}{=} \min\{m,n\}$, et

$$f_{n,m} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_B \,\middle|\, X_{-k_{m,n}},\ldots,X_{k_{m,n}}\right].$$

On se trouve donc dans la situation suivante : un bon moyen pour estimer de façon fiable l'appartenance à B consiste à ne pas tenir compte de toute l'information dont on dispose !

Cette notion de *fiabilité* des processus pose de nombreuses questions, dont la plus naturelle au vu des exemples donnés ci-dessus est : tout système dynamique admet-il un générateur fiable ? La réponse à cette question paraît d'autant moins évidente que la fiabilité des exemples présentés ci-dessus semble provenir de raisons totalement différentes.

Références

[1] T.M. Adams, *Smorodinsky's conjecture on rank-one mixing*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 3, 739–744.

[2] R. Bowen, *Equilibrium states and the ergodic theory of anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 470, Springer, Berlin, 1975.

[3] R. Cairoli, *Une inégalité pour martingales à indices multiples et ses applications*, Séminaire de Probabilités IV, Lecture Notes in Mathematics 124, Springer-Verlag, 1970, pp. 1–28.

[4] R.V. Chacon, *Weakly mixing transformations which are not strongly mixing*, Proceedings of the AMS **22** (1969), 559–562.

[5] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin et Ya.G. Sinai, *Ergodic theory*, Springer-Verlag, 1982.

[6] M. de Guzmán, *Differentiation of integrals in* $\mathbb{R}^n$, Lecture Notes in Mathematics, vol. 481, Springer-Verlag, 1975.

[7] A. Del Junco, *Transformations with discrete spectrum are stacking transformations*, Canadian Journal of Mathematics **28** (1976), no. 4, 836–839.

[8] A. Del Junco et M. Keane, *On generic points in the Cartesian square of Chacón's transformation*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **5** (1985), 59–69.

[9] A. Del Junco, M. Rahe et L. Swanson, *Chacon's automorphism has minimal self joinings*, Journal d'Analyse Mathématiques **37** (1980), 276–284.

[10] J. Feldman, *New K-automorphisms and a problem of Kakutani*, Israel Journal of Mathematics **24** (1976), 16–38.

[11] S. Ferenczi, *Systèmes de rang fini*, Thèse de doctorat d'État, université d'Aix-Marseille 2, 1990.

[12] S. Ferenczi et M. Lemańczyk, *Rank is not a spectral invariant*, Studia Math. **98** (1991), 227–230.

[13] C. Foias et S. Stratila, *Ensembles de Kronecker dans la théorie ergodique*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **267** (1968), 166–168.

[14] N.A. Friedman et D.S. Ornstein, *Ergodic transformations induce mixing transformations*, Advannces in Mathematics **10** (1973), 147–163.

[15] H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation*, Math. Systems Theory **1** (1967), 1–49.

[16] M. Gerber, *A zero-entropy mixing transformation whose product with itself is loosely Bernoulli*, Israel J. Math. **38** (1981), no. 1-2, 1–22.

[17] E. Glasner et J.L. King, *A zero-one law for dynamical properties*, Topological Dynamics and Applications (Minneapolis, MN, 1995), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 231–242.

[18] E. Glasner, J-P. Thouvenot et B. Weiss, *Entropy theory without a past*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **20** (2000), 1355–1370.

[19] P. Hall et C.C. Heyde, *Martingale limit theory and its application*, Academic Press Inc., 1980.

[20] P.R. Halmos, *In general a measure preserving transformation is mixing*, Ann. of Math. (2) **45** (1944), 786–792.

[21] ———, *Lectures on ergodic theory*, Chelsea Publishing Co., New-York, 1956.

[22] A. Iwanik et J. de Sam Lazaro, *Sur la multiplicité L^p d'un automorphisme gaussien*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **312** (1991), 875–876.

[23] A. Iwanik, J. de Sam Lazaro, M. Lemańczyk et T. de la Rue, *Quelques remarques sur les facteurs des systèmes dynamiques gaussiens*, Studia Math. **125** (1997), no. 3, 247–254.

[24] S. Kakutani, *Induced measure preserving transformations*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **19** (1943), 635–641.

[25] A Katok, *Smooth non-Bernoulli K-automorphisms*, Inventiones math. **61** (1980), 291–300.

[26] A. Katok et A.M. Stepin, *Approximations in ergodic theory*, Russian Math. Surveys **22** (1967), 77–102.

[27] J.L. King, *The commutant is the weak closure of the powers, for rank-1 transformations*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **6** (1986), 363–384.

[28] ———, *Joining-rank and the structure of finite-rank mixing transformations*, J. Analyse Math. **51** (1988), 182–227.

[29] ———, *The generic transformation has roots of all orders*, Colloquium Mathematicum **84/85** (2000), 521–547.

[30] F. Ledrappier, *Sur la condition de Bernoulli faible et ses applications*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 532, pp. 152–159, Springer-Verlag, 1976.

[31] M. Lemańczyk et M.K. Mentzen, *On metric properties of substitutions*, Composito Mathematica **65** (1988), 241–263.

[32] M. Lemańczyk, F. Parreau et J.P. Thouvenot, *Gaussian automorphisms whose ergodic self-joinings are Gaussian*, Fundamenta Mathematicae **164** (2000), 253–293.

[33] E. Lesigne, B. Rittaud et T. de la Rue, *Weak disjointness of measure preserving dynamical systems*, À paraître dans *Ergodic Theory and Dynamical Systems*.

[34] P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, 1954.

[35] I. Meilijson, *Mixing properties of a class of skew-products*, Israel Journal of Mathematics **19** (1974), 266–270.

[36] D.S. Ornstein, *On the root problem in ergodic theory*, Proceedings of the 6th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability **2** (1970), 347–356.

[37] ———, *A K-automorphism with no square root and Pinsker's conjecture*, Advances in Math. **10** (1973), 89–102.

[38] ———, *A mixing transformation for which Pinsker's conjecture fails*, Advances in Math. **10** (1973), 103–123.

[39] ———, *Ergodic theory, randomness and dynamical systems*, Yale Univ. Press, New Haven, 1974.

[40] D.S. Ornstein, D.J. Rudolph et B. Weiss, *Equivalence of measure preserving transformations*, Memoirs of the American Mathematical Society 262, 1982.

[41] D.S. Ornstein et M. Smorodinsky, *Ergodic flows of positive entropy can be time changed to become K-flows*, Israel Journal of Mathematics **26** (1977), 75–83.

[42] V.V. Petrov, *Sums of independent random variables*, Springer-Verlag, 1975.

[43] M. Rahe, *Finite coding factors of Markov generators*, Israel Journal of Mathematics **32** (1979), 349–355.

[44] M. Ratner, *Horocycle flows are loosely Bernoulli*, Israel Journal of Mathematics **31** (1978), 122–132.

[45] ———, *The Cartesian square of the horocycle flow is not loosely Bernoulli*, Israel Journal of Mathematics **34** (1979), 72–95.

[46] Benoît Rittaud, *Convergence ponctuelle de moyennes ergodiques non conventionnelles et distribution asymptotique de suites oscillantes*, Thèse de doctorat, université de Tours, 1999.

[47] V.A. Rokhlin, *A "general" measure-preserving transformation is not mixing*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **60** (1948), 349–351.

[48] ———, *On the fundamental ideas of measure theory*, AMS Translations Serie 1 **10** (1963), 2–53, (Première publication en russe : 1949.).

[49] D.J. Rudolph, *Asymptotically Brownian skew products give non-loosely Bernoulli K-automorphisms*, Inventiones math. **91** (1988), 105–128.

[50] T. de la Rue, *Sur les processus quasi-Markov et certains de leurs facteurs*, Preprint.

[51] ———, *Entropie d'un système dynamique gaussien : Cas d'une action de* $\mathbb{Z}^d$, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I **317** (1993), 191–194.

[52] ———, *Espaces de lebesgue*, Séminaire de Probabilités XXVII, Lecture Notes in Mathematics 1557, Springer-Verlag, 1993, pp. 15–21.

[53] ———, *Quelques résultats sur les systèmes dynamiques gaussiens réels*, Thèse de doctorat, université de Rouen, 1994.

[54] ———, *Mouvement moyen et système dynamique gaussien*, Probab. Theory Relat. Fields **102** (1995), 45–56.

[55] ———, *Systèmes dynamiques gaussiens d'entropie nulle, lâchement et non lâchement Bernoulli*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **16** (1996), 379–404.

[56] ———, *L'ergodicité induit un type spectral maximal équivalent à la mesure de Lebesgue*, Ann. Inst. Henri Poincaré **34** (1998), 249–263.

[57] ———, *L'induction ne donne pas toutes les mesures spectrales*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **18** (1998), 1447–1466.

[58] ———, *Rang des systèmes dynamiques gaussiens*, Israel Journal of Mathematics **104** (1998), 261–283.

[59] ———, *Sur la cohomologie dans les schémas de Bernoulli*, Colloquium Mathematicum **84/85** (2000), 23–28.

[60] ———, *Examples and counterexamples to almost-sure convergence of bilateral martingales*, New-York Journal of Mathematics **8** (2002), 133–144.

[61] ———, *Vitesse de dispersion pour une classe de martingales*, Ann. Inst. Henri Poincaré **PR 38** (2002), no. 4, 465–474.

[62] T. de la Rue et J. de Sam Lazaro, *Une transformation générique peut être insérée dans un flot*, Ann. Inst. Henri Poincaré **PR 39** (2003), no. 1, 121–134.

[63] J.P. Thouvenot, *Quelques propriétés des systèmes dynamiques qui se décomposent en un produit de deux systèmes dont l'un est un schéma de Bernoulli*, Israel Journal of Mathematics **21** (1975), 177–207.

[64] ———, *The metrical structure of some gaussian processes*, Ergodic Theory and Related Topics II (Georgenthal), Teubner Texte zur Mathematik, 1986, pp. 195–198.