

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE ROUEN UNIVERSITÉ DU HAVRE INSA DE ROUEN

PUBLICATION de l'URA 1378
ANALYSE et MODÈLES STOCHASTIQUES

*QUELQUES REMARQUES SUR
LES FACTEURS DES SYSTÈMES DYNAMIQUES GAUSSIENS*

**Anzelm IWANIK, Mariusz LEMAŃCZYK,
Thierry DE LA RUE, José DE SAM LAZARO**

Document 1996-10

Université de Rouen UFR des sciences
Mathématiques, Site Colbert, URA 1378
F 76821 MONT SAINT AIGNAN Cedex
Tél: 35 14 71 00 Fax: 32 10 37 94

Quelques remarques sur les facteurs des systèmes dynamiques gaussiens

A. IWANIK, M. LEMAŃCZYK, T. DE LA RUE, J. DE SAM LAZARO

Résumé

On étudie ici les facteurs des systèmes dynamiques gaussiens engendrés par des fonctions ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées.

Comme application, on montre que pour un automorphisme gaussien à spectre simple, la partition $\{(X_0 \leq 0), (X_0 > 0)\}$ est génératrice.

Abstract

We study here the factors of Gaussian dynamical systems which are generated by functions depending only on a finite number of coordinates.

As an application, we show that for Gaussian automorphisms with simple spectrum, the partition $\{(X_0 \leq 0), (X_0 > 0)\}$ is generating.

Introduction

On se place dans le cadre d'un système dynamique $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$, que l'on suppose gaussien : il existe un processus gaussien réel centré $(X_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ qui engendre $\mathcal{A}$, avec $X_p = X_0 \circ T^p$ pour tout entier p . La loi d'un tel processus, et donc toutes les propriétés du système dynamique qu'il engendre, est entièrement déterminée par la donnée de ses covariances, qui s'écrivent

$$\langle X_p, X_q \rangle_{L^2(\mu)} = \mathbb{E}[X_p X_q] = \int_{[-\pi, \pi]} e^{i(p-q)t} d\sigma(t), \quad (1)$$

où σ est une mesure finie symétrique sur $[-\pi, \pi]$, appelée *mesure spectrale du système*. Un tel système est construit canoniquement en prenant $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, X_p étant la projection sur la p^e coordonnée, T le décalage des coordonnées et μ la probabilité sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ qui donne au processus (X_p) la loi voulue. On pourra toujours supposer dans la suite que le modèle utilisé est celui-ci. On suppose aussi le système ergodique, ce qui équivaut à

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad \sigma(\{t\}) = 0.$$

Pour une présentation détaillée de ces systèmes, on peut par exemple consulter [1].

On s'intéresse ici aux *facteurs* d'un tel système, c'est-à-dire aux sous-tribus $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$ qui sont T -invariantes. Rappelons que chaque facteur $\mathcal{F}$ de T définit un système dynamique noté $T_{\mathcal{F}}$ sur l'espace $\Omega_{\mathcal{F}}$, obtenu à partir de Ω en identifiant les points ω et ω' tels que $\forall F \in \mathcal{F}, \mathbb{1}_F(\omega) = \mathbb{1}_F(\omega')$.

Les deux premiers auteurs tiennent à remercier le laboratoire "Analyse et modèles stochastiques" de l'université de Rouen, pour l'accueil chaleureux qu'ils ont reçu de mars à mai 1996, période durant laquelle ce travail fut réalisé.

1 Facteurs classiques d'un système gaussien

On note $\mathcal{H}$ le sous-espace gaussien réel fermé de $L^2(\mu)$ engendré par le processus (X_p) , et $L^2_{\text{sym}}([-\pi, \pi], \sigma)$ le sous-espace réel de $L^2(\sigma)$ formé des fonctions φ telles que $\forall t, \varphi(-t) = \varphi(t)$. On construit classiquement à partir de (1) une isométrie entre $\mathcal{H}$ et $L^2_{\text{sym}}([-\pi, \pi], \sigma)$, qui fait correspondre X_p à $e^{ip \cdot}$ pour tout entier p . En général, si $X \in \mathcal{H}$ correspond par cette isométrie à $\varphi \in L^2_{\text{sym}}([-\pi, \pi], \sigma)$, on note

$$X \longleftrightarrow \varphi.$$

On voit facilement qu'alors, pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$X \circ T^p \longleftrightarrow \varphi e^{ip \cdot}.$$

Si $\mathcal{G}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ qui correspond par cette isométrie au sous-espace $\mathcal{V}$ de $L^2_{\text{sym}}([-\pi, \pi], \sigma)$, on note aussi

$$\mathcal{G} \longleftrightarrow \mathcal{V}.$$

1.1 Facteurs gaussiens

Pour tout $A \subset [-\pi, \pi]$ mesurable et symétrique, on note

$$L^2_{\text{sym}}(A, \sigma) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \varphi \in L^2_{\text{sym}}([-\pi, \pi], \sigma) \mid \varphi|_{([-\pi, \pi] \setminus A)} = 0 \right\};$$

on définit alors le sous-espace fermé $\mathcal{H}_A$ de $\mathcal{H}$ par

$$\mathcal{H}_A \longleftrightarrow L^2_{\text{sym}}(A, \sigma).$$

Comme $L^2_{\text{sym}}(A, \sigma)$ est stable par la multiplication par $e^{i \cdot}$, $\mathcal{H}_A$ est stable par $U_T : X \mapsto X \circ T$. La sous-tribu $\mathcal{F}_A$ engendrée par $\mathcal{H}_A$ est donc T -invariante : c'est un facteur de T . L'espace $\mathcal{H}_A$ étant linéairement engendré par le processus gaussien $\left(X_p^{(A)}\right)_{p \in \mathbb{Z}}$ défini par

$$\forall p \in \mathbb{Z}, X_p^{(A)} = X_0^{(A)} \circ T^p \longleftrightarrow \mathbb{1}_A e^{ip \cdot},$$

le facteur $\mathcal{F}_A$ est engendré par ce processus. Le système dynamique $T_{\mathcal{F}_A}$ est donc aussi un système gaussien, dont la mesure spectrale σ_A est absolument continue par rapport à σ , de densité

$$\frac{d\sigma_A}{d\sigma} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{1}_A.$$

Un tel facteur $\mathcal{F}_A$ sera donc appelé un facteur gaussien de T .

1.2 Facteurs compacts

On note $C(T)$ le groupe des automorphismes de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ qui commutent avec T , et on s'intéresse au sous-groupe $\mathcal{S}$ de $C(T)$ formé des S tels que $\mathcal{H}$ soit stable par U_S . Si S est dans $\mathcal{S}$, on a donc $X_0 \circ S \in \mathcal{H}$, et il existe donc $\varphi \in L^2_{\text{sym}}([-\pi, \pi], \sigma)$ tel que

$$X_0 \circ S \longleftrightarrow \varphi.$$

Comme $ST = TS$, on a alors aussi pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$X_p \circ S \longleftrightarrow e^{ip \cdot} \varphi,$$

puis pour tout $X \in H$,

$$X \longleftrightarrow \psi \implies X \circ S \longleftrightarrow \psi\varphi.$$

Comme U_S est une isométrie, la multiplication par φ doit être une isométrie de $L^2_{\text{sym}}([-\pi, \pi], \sigma)$, ce qui signifie $|\varphi| = 1$ σ -p.s.

On notera désormais $\mathcal{M}$ le groupe multiplicatif formé des $\varphi \in L^2_{\text{sym}}([-\pi, \pi], \sigma)$ qui sont de module constant égal à 1. Si $\varphi \in \mathcal{M}$, la multiplication par φ dans $L^2_{\text{sym}}([-\pi, \pi], \sigma)$ définit sur $\mathcal{H}$ une isométrie U qui commute avec $U_T|_{\mathcal{H}}$. Le processus gaussien $(UX_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ a alors la même loi que $(X_p)_{p \in \mathbb{Z}}$, et engendre linéairement $\mathcal{H}$, donc aussi la tribu $\mathcal{A}$. Il existe alors un unique $S \in \mathcal{S}$ tel que $UX_p = X_p \circ S$ pour tout p , donc tel que $U_S|_{\mathcal{H}} = U$.

On peut donc ainsi établir un isomorphisme entre les groupes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{M}$, et on utilisera aussi la notation $S \longleftrightarrow \varphi$ pour indiquer que $S \in \mathcal{S}$ correspond par cet isomorphisme à $\varphi \in \mathcal{M}$. Notons que, $\mathcal{S}$ étant muni de la topologie de la convergence faible des transformations (définie par : $S_n \longrightarrow S \iff \forall A \in \mathcal{A}, \mu(S_n^{-1}A\Delta S^{-1}A) \longrightarrow 0$), et $\mathcal{M}$ de la topologie de $L^2(\sigma)$, ces deux groupes sont ainsi *topologiquement* isomorphes, comme on peut le voir dans [4].

Si Γ est un sous-groupe compact de $\mathcal{S}$, la tribu

$$\mathcal{F}_\Gamma \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{A \in \mathcal{A} / \forall S \in \Gamma, SA = A\}$$

est T -invariante. C'est donc un facteur de T , appelé *facteur compact*.

Un cas particulièrement simple et important est celui où $\Gamma = \{\text{Id}, -\text{Id}\}$. Le facteur $\mathcal{F}_\Gamma$ est alors constitué des parties de Ω symétriques par rapport à l'origine, et on l'appelle le *facteur pair*. Ce facteur apparaît dans un travail de Newton et Parry ([7]), qui l'utilisent pour construire l'un des premiers exemples de système dynamique d'entropie nulle à spectre de Lebesgue dénombrable.

Lemme 1 *Supposons le facteur $\mathcal{F}_\Gamma$ non trivial (c'est-à-dire contenant des parties de Ω de mesure strictement comprise entre 0 et 1), soit $S \in \Gamma$ et $\varphi \in \mathcal{M}$ tels que $S \longleftrightarrow \varphi$. Alors il existe $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| = 1$, tel que*

$$\sigma(\{t \in [-\pi, \pi] / \varphi(t) = z_0\}) > 0.$$

Preuve — Notons η la mesure image de σ par φ . Il est facile de voir que le type spectral maximal de l'opérateur U_S sur $\mathcal{H}$ est justement η . En décomposant $\mathcal{H}$ en une somme de sous-espaces orthogonaux et cycliques pour U_S , on voit que le système dynamique $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, S)$ est un produit direct de systèmes dynamiques gaussiens, qui sont tous à mesure spectrale absolument continue par rapport à η . Supposons maintenant que pour tout z ,

$$\sigma(\{t \in [-\pi, \pi] / \varphi(t) = z\}) = 0,$$

alors η est continue, et donc chacun de ces systèmes gaussiens est faiblement mélangeant. On en déduit que S est ergodique, et donc $\mathcal{F}_\Gamma$ ne peut être que le facteur trivial. $\square$

1.3 Facteurs classiques

On appelle *facteur classique* de T tout facteur compact d'un facteur gaussien de T . L'importance des facteurs classiques dans l'étude des facteurs des systèmes gaussiens peut se justifier par le théorème suivant, concernant certains systèmes gaussiens étudiés dans [2].

Théorème 2 *Si T est GAG (Gaussien à Autocouplages Gaussiens), alors les facteurs classiques de T sont les seuls facteurs de T .*

Ce théorème s'applique en particulier dans le cas où T est un gaussien-Kronecker, et plus généralement dans le cas où T est un gaussien à spectre simple (voir [3]). Il est donc valable même pour certains systèmes gaussiens mélangeants, puisqu'il en existe à spectre simple (voir [6]).

2 Facteur engendré par une variable ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées

2.1 Quelques résultats sur les lois gaussiennes multidimensionnelles

Rappelons qu'un vecteur gaussien $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ est dit *non dégénéré* si les variables aléatoires réelles $Y_1, \dots, Y_m$ ne sont pas linéairement liées. Une propriété classique des lois gaussiennes multidimensionnelles affirme que Y est non dégénéré si et seulement si la loi ν_Y de Y est équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$. On utilisera dans la suite les deux lemmes qui suivent.

Lemme 3 *La mesure spectrale σ du processus gaussien réel $(X_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ étant diffuse, pour tout $m \geq 1$ et tous $p_1 < p_2 < \dots < p_m$ entiers, le vecteur gaussien $(X_{p_1}, \dots, X_{p_m})$ est non dégénéré.*

Preuve — Supposons qu'une combinaison linéaire des X_{p_i} soit nulle. De $\alpha_1 X_{p_1} + \dots + \alpha_m X_{p_m} = 0$, on déduit dans $L^2_{\text{sym}}([-\pi, \pi], \sigma)$

$$\alpha_1 e^{ip_1 \cdot} + \dots + \alpha_m e^{ip_m \cdot} = 0.$$

Comme σ est diffuse, il existe donc une infinité de réels θ dans $[-\pi, \pi]$ tels que

$$\alpha_1 e^{ip_1 \theta} + \dots + \alpha_m e^{ip_m \theta} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0.$$

□

Lemme 4 *Soit f une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$, X et Y deux vecteurs gaussiens à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ non dégénérés et indépendants. Si Y est indépendant de $f(X + Y)$, alors f est constante.*

Preuve — Notons ν_X et ν_Y les lois respectives de X et Y sur $\mathbb{R}^m$. Comme Y est non dégénéré, ν_Y est équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$, et on a par l'indépendance de $f(X + Y)$ et Y , pour presque tout $y \in \mathbb{R}^m$,

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x + y) d\nu_X(x) = C \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{E}[f(X + Y)].$$

Soit φ la densité de ν_X par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$; pour presque tout y on a

$$C = \int_{\mathbb{R}^m} f(x + y) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \varphi(x - y) dx. \quad (2)$$

Comme $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \varphi(x - y) dx$ est clairement continue, (2) est en fait vraie pour tout $y \in \mathbb{R}^m$, d'où

$$\forall y \in \mathbb{R}^m, \quad \int_{\mathbb{R}^m} (f(x) - C) \varphi(x - y) dx = 0.$$

Or, ν_X étant une loi gaussienne sur $\mathbb{R}^m$, la transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ de φ ne s'annule pas, et cela implique que les translatées de φ , c'est-à-dire les fonctions $\varphi_y : x \mapsto \varphi(x - y)$, $y \in \mathbb{R}^m$, engendrent $L^1(\mathbb{R}^m)$ (voir [5]). On en déduit aisément que $f(x) = C$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^m$. $\square$

2.2 D'autres facteurs ?

On fixe maintenant une fonction $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable et bornée qui n'est pas presque partout constante, des entiers $p_1 < \dots < p_m$, et on définit une variable aléatoire réelle F par $F \stackrel{\text{déf}}{=} f(X_{p_1}, \dots, X_{p_m})$. On note $\mathcal{F}_F$ le facteur engendré par F , c'est à dire la tribu engendrée par les variables $F \circ T^p$, $p \in \mathbb{Z}$.

Proposition 5 *Soit A symétrique dans $[-\pi, \pi]$ tel que $\mathcal{F}_F \subset \mathcal{F}_A$. Alors $A = [-\pi, \pi]$.*

Preuve — Dans $\mathcal{H}$, on peut écrire pour tout entier p

$$X_p = X_p^{(A)} + X_p^{(A^c)}.$$

Les sous-espaces $\mathcal{H}_A$ et $\mathcal{H}_{A^c}$ de $\mathcal{H}$ étant orthogonaux, les facteurs gaussiens $\mathcal{F}_A$ et $\mathcal{F}_{A^c}$ sont indépendants. Comme F est supposée $\mathcal{F}_A$ -mesurable, la variable $f(X_{p_1}, \dots, X_{p_m})$ est indépendante du vecteur gaussien

$$Y \stackrel{\text{déf}}{=} (X_{p_1}^{(A^c)}, \dots, X_{p_m}^{(A^c)}).$$

Par hypothèse, F est non constante, donc A ne peut pas être vide. D'après le lemme 3, le vecteur

$$X \stackrel{\text{déf}}{=} (X_{p_1}^{(A)}, \dots, X_{p_m}^{(A)})$$

n'est pas dégénéré. Le lemme 4 montre alors que le vecteur Y doit être dégénéré, d'où $A^c = \emptyset$. $\square$

Proposition 6 *Soit Γ un sous-groupe compact de $\mathcal{S}$ tel que $\mathcal{F}_F$ soit contenu dans $\mathcal{F}_\Gamma$. Alors*

- Ou bien $\mathcal{F}_\Gamma$ est le facteur pair, mais ceci n'est possible que si f est paire,
- Ou bien $\Gamma = \{Id\}$, i.e. $\mathcal{F}_\Gamma = \mathcal{A}$.

Preuve — Soit $S \in \Gamma$, et $\varphi \in \mathcal{M}$ tel que $S \longleftrightarrow \varphi$. Puisque F est $\mathcal{F}_\Gamma$ -mesurable, on a $F \circ S = F$, c'est-à-dire

$$f(X_{p_1}, \dots, X_{p_m}) = f(X_{p_1} \circ S, \dots, X_{p_m} \circ S).$$

Si le vecteur gaussien $(X_{p_1}, \dots, X_{p_m}, X_{p_1} \circ S, \dots, X_{p_m} \circ S)$ était non dégénéré, cela contredirait l'hypothèse f non constante. On a donc une relation linéaire non triviale

$$\alpha_1 X_{p_1} + \dots + \alpha_m X_{p_m} = \beta_1 X_{p_1} \circ S + \dots + \beta_m X_{p_m} \circ S,$$

qui s'écrit dans $L_{\text{sym}}^2([-\pi, \pi], \sigma)$

$$\alpha_1 e^{ip_1 \cdot} + \dots + \alpha_m e^{ip_m \cdot} = \left(\beta_1 e^{ip_1 \cdot} + \dots + \beta_m e^{ip_m \cdot} \right) \varphi. \quad (3)$$

Mais le facteur $\mathcal{F}_\Gamma$ n'étant pas le facteur trivial, (car il rend mesurable la variable F non constante), le lemme 1 prouve qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$, $|z_0| = 1$, tel que

$$\sigma(\{t \in [-\pi, \pi] / \varphi(t) = z_0\}) > 0.$$

L'égalité (3) montre alors qu'il existe une infinité de $t \in [-\pi, \pi]$ tels que

$$\alpha_1 e^{ip_1 t} + \dots + \alpha_m e^{ip_m t} = z_0 \left(\beta_1 e^{ip_1 t} + \dots + \beta_m e^{ip_m t} \right).$$

On en déduit : pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, $\alpha_j = z_0 \beta_j$. Les α_j et les β_j étant réels et non tous nuls, on a donc $z_0 = 1$ ou $z_0 = -1$. Dans le premier cas, on a par (3) $\varphi \equiv 1$, d'où $S = \text{Id}$, et dans le second cas, $\varphi \equiv -1$ d'où $S = -\text{Id}$.

On en conclut que $\mathcal{F}_\Gamma$ est soit le facteur pair (si $\Gamma = \{\text{Id}, -\text{Id}\}$), soit $\mathcal{A}$ tout entière (si Γ ne contient que l'identité). Mais clairement, le premier cas n'est possible que si f est paire. $\square$

On déduit des deux propositions précédentes le résultat suivant.

Théorème 7 *Le facteur engendré par la variable aléatoire $f(X_{p_1}, \dots, X_{p_m})$ non constante est*

- ou bien $\mathcal{A}$ tout entière,
- ou bien le facteur pair (mais ce n'est possible que si f est paire),
- ou bien un facteur non classique.

Notons ici que l'hypothèse “ F ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées” est capitale : si on autorise F à dépendre de tout le processus $(X_p)_{p \in \mathbb{Z}}$, le facteur $\mathcal{F}_F$ peut alors être n'importe quel facteur de T . En effet, pour tout facteur $\mathcal{F}$ de T il existe une partition de Ω dénombrable $\mathcal{P} = (P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui engendre $\mathcal{F}$ (voir [8]). Il suffit alors de prendre $F = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbb{1}_{P_n}$ où les a_n sont deux à deux distincts.

Dans le cas où T est GAG, les théorèmes 2 et 7 donnent le corollaire suivant.

Corollaire 8 *Si T est GAG, et si f n'est pas paire, la tribu engendrée par les variables $f(X_{p_1}, \dots, X_{p_m}) \circ T^p$, $p \in \mathbb{Z}$ est $\mathcal{A}$ tout entière.*

En particulier, si T est GAG, la partition $\{(X_0 \leq 0), (X_0 > 0)\}$ est génératrice, et il en est de même de toute partition de Ω obtenue à partir d'une partition de $\mathbb{R}$ en ensembles non tous symétriques par rapport à l'origine. Bien sûr, dans le cas où σ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ce n'est plus vrai car alors T est d'entropie infinie (voir [9]), et le facteur engendré par une partition finie n'a qu'une entropie finie. Mais peut-on trouver un gaussien d'entropie nulle pour lequel une telle partition n'est pas génératrice ?

Le théorème 7 permet aussi de voir que certains systèmes gaussiens d'entropie nulle admettent des facteurs qui ne sont pas classiques. La mesure σ finie et symétrique sur $[-\pi, \pi]$ étant donnée, notons σ_+ sa restriction à $[0, \pi]$. Soient $\sigma_+^\perp$ l'image de σ_+ sur $[0, \pi/2]$ par l'homothétie

$t \mapsto t/2$, et $\sigma_+^2 \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \sigma_+^1 * \delta_{\pi/2}$ sur $[\pi/2, \pi]$. On d\'efinit σ^1 et σ^2 comme les mesures sym\'etriques sur $[-\pi, \pi]$ obtenue respectivement \`a partir de σ_+^1 et de σ_+^2 , puis $\eta \stackrel{\text{d\'ef}}{=} (\sigma^1 + \sigma^2)/2$. Consid\'erons maintenant un syst\eme dynamique gaussien $(\Omega, \mathscr{A}, \mu, T)$, engendr\'e par un processus gaussien $(X_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ de mesure spectrale η . Un calcul simple sur les covariances de ce processus montre que les deux sous-processus $(X_{2p})_{p \in \mathbb{Z}}$ et $(X_{2p+1})_{p \in \mathbb{Z}}$ sont ind\'ependants, chacun \'etant de mesure spectrale σ . On peut alors d\'efinir une transformation S de Ω pr\'eservant μ , par

$$X_{2p} \circ S \stackrel{\text{d\'ef}}{=} X_{2p}, \quad X_{2p+1} \circ S \stackrel{\text{d\'ef}}{=} -X_{2p+1} \quad (p \in \mathbb{Z}).$$

(Ici, S ne commute pas avec T .) Il est clair que tout \'ev\'enement dans le facteur $\mathscr{F}_{|X_0|}$, c'est-\`a-dire dans la tribu engendr\'ee par le processus $(|X_p|)_{p \in \mathbb{Z}}$, est S -invariant. Mais alors, $\mathscr{F}_{|X_0|}$ ne peut pas \^etre le facteur pair, car celui-ci contient par exemple l'\'ev\'enement $(X_0 X_1 > 0)$, qui n'est pas S -invariant. Comme $\mathscr{F}_{|X_0|}$ ne peut pas \^etre $\mathscr{A}$ tout enti\ere, on en d\'eduit que $\mathscr{F}_{|X_0|}$ n'est pas un facteur classique.

Références

- [1] I.P. Cornfeld, S.W. Fomin, J.G. Sinai, *Ergodic Theory*, Springer-Verlag 1982.
- [2] M. Lemańczyk, F. Parreau, J.-P. Thouvenot, *On the disjointness problem for Gaussian automorphisms*, preprint.
- [3] M. Lemańczyk, F. Parreau, *Gaussian automorphisms whose self-joinings are Gaussian*, preprint
- [4] M. Lemańczyk, J. de Sam Lazaro, *Spectral analysis of certain compact factors for Gaussian dynamical systems*, à paraître dans Isr. J.Math. (1996)
- [5] L.H. Loomis, *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, Van Nostrand, Princeton 1953.
- [6] D. Newton, *On Gaussian processes with simple spectrum*, Z. für Wahr. verw. Geb. **5** (1966), 207-209.
- [7] D. Newton, W. Parry, *On a factor automorphism of a normal dynamical system*, Ann. Math. Stat. **37** (1966), 1528-1533.
- [8] W. Parry, *Generators in Ergodic Theory*, Benjamin, New York 1969.
- [9] T. de la Rue, Entropie d'un système dynamique gaussien : cas d'une action de $\mathbb{Z}^d$, C. R. Acad. Sci. Paris, Série 1, **317** (1993), 191-194.
- [10] J. P. Thouvenot, *Some properties and applications of joinings in ergodic theory*, Ergodic Th. and its Connections with Harmonic Anal., London Math. Soc. 1995, 207-235.
- [11] J. P. Thouvenot, *Utilisation des processus gaussiens en théorie ergodique*, preprint

A. Iwanik, Instytut Matematyki,
Politechnika Wrocławska, 50-370 Wrocław, Pologne
e-mail: iwanik@banach.im.pwr.wroc.pl

M. Lemańczyk, Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet M. Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń, Pologne
e-mail: mlem@mat.uni.torun.pl

T. de la Rue, Analyse et Modèles Stochastiques, URA CNRS 1378,
Université de Rouen, 76821 Mont-Saint-Aignan Cedex, France
e-mail: delarue@univ-rouen.fr

J. de Sam Lazaro, Analyse et Modèles Stochastiques, URA CNRS 1378,
Université de Rouen, 76821 Mont-Saint-Aignan Cedex, France
e-mail: lazaro@univ-rouen.fr