CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE ROUEN   UNIVERSITÉ DU HAVRE   INSA DE ROUEN

PUBLICATION de l'UPRESA 6085
ANALYSE et MODÈLES STOCHASTIQUES

SUR LA COHOMOLOGIE DANS LES SCHÉMAS DE BERNOULLI

Thierry de la RUE

Document 1999-02

Université de Rouen UFR des sciences
Mathématiques, Site Colbert, UPRESA 6085
F 76821 MONT SAINT AIGNAN Cedex
Tél: (33)(0) 235 14 71 00   Fax: (33)(0) 232 10 37 94

Sur la cohomologie dans les schémas de Bernoulli

Thierry DE LA RUE*

On cohomology in Bernoulli shifts

Abstract

We introduce an invariant of cohomology in Bernoulli shifts, which is used to answer a question about cohomology of Hölder functions with finitary functions whose coding time is integrable.

When restricted to the class of Hölder functions, this invariant even provides a criterion of cohomology.
Key words : Bernoulli shift, cohomology, Hölder function, symbolic dynamic.

Résumé

On introduit un invariant de la cohomologie dans les schémas de Bernoulli, qui est utilisé pour répondre à une question concernant la cohomologie d'une fonction höldérienne avec une fonction finitaire à temps de codage d'espérance finie.

Cet invariant fournit aussi un critère de cohomologie si l'on se restreint à la classe des fonctions höldériennes.
Mots clés : schéma de Bernoulli, cohomologie, fonction höldérienne, dynamique symbolique.

Classification MSC 1991 : 28D05, 60G10

1 Préliminaires

On note $X \overset{\text{déf}}{=} A^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des suites doublement infinies de lettres appartenant à un alphabet fini A. On considère la transformation T de X qui décale les coordonnées à gauche, *i.e.* si $x = (x_p)_{p\in\mathbb{Z}} \in X$, Tx est le point $y = (y_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ défini par $\forall p \in \mathbb{Z},\ y_p \overset{\text{déf}}{=} x_{p+1}$. On munit X d'une probabilité μ T-invariante, de la forme $\mu = P^{\otimes\mathbb{Z}}$, où P est une probabilité sur A chargeant chaque lettre. Le système dynamique ainsi obtenu est donc un schéma de Bernoulli.

Définition 1.1 *Deux fonctions mesurables f et g de X vers $\mathbb{R}$ sont dites* cohomologues *s'il existe une fonction mesurable $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ appelée* fonction de transfert *telle que, pour μ-presque tout x,*

$$g(x) = f(x) + \varphi(x) - \varphi(Tx).$$

*UPRES-A CNRS 6085, Université de Rouen – Mathématiques, Site Colbert, F76821 Mont-Saint-Aignan Cedex. e-mail : delarue@univ-rouen.fr

Étant donnée une fonction f, il est souvent bien utile de pouvoir trouver g qui lui soit cohomologue, et appartenant à une classe de fonctions donnée. Dans cet esprit, citons par exemple le résultat de Kočergin ([2]), qui prouve que toute fonction dans L^1 est cohomologue à une fonction continue, ou encore celui de Bowen ([1]), selon lequel une fonction höldérienne est toujours cohomologue à une fonction höldérienne ne dépendant que des coordonnées d'indices positifs de x. C'est une question de ce type qui constitue l'origine de ce travail : une fonction höldérienne est-elle toujours cohomologue à une fonction finitaire, à temps de codage d'espérance finie ? (Voir les définitions au paragraphe suivant.) Pour y répondre, on introduit un invariant de la cohomologie dans un schéma de Bernoulli.

Pour $x \in X$ et $a \in A$, on note $x^{(a)}$ le point de X ayant les mêmes coordonnées que x, exceptée celle d'indice 0 qui est remplacée par a :

$$\forall p \neq 0, \quad x_p^{(a)} \stackrel{\text{déf}}{=} x_p, \quad \text{et} \quad x_0^{(a)} \stackrel{\text{déf}}{=} a.$$

Si f est une fonction mesurable de X vers $\mathbb{R}$, et si pour un point $x \in X$ l'expression

$$\Delta_a^n f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=-n}^{n} \Big(f(T^k x) - f(T^k x^{(a)}) \Big)$$

a une limite quand $n \longrightarrow +\infty$, on note $\Delta_a f(x)$ cette limite. En fait, il suffit d'une condition un peu plus faible pour pouvoir définir sans ambiguïté $\Delta_a f(x)$: si on peut trouver une sous-suite d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ de densité 1 telle que $\Delta_a^{n_k} f(x)$ converge, on pose

$$\Delta_a f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{k \longrightarrow +\infty} \Delta_a^{n_k} f(x).$$

Exemples

Définition 1.2 *Une fonction $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite* höldérienne *s'il existe $M > 0$ et $\alpha \in]0,1[$ tels que, pour tous $x, y \in X$ et tout entier $n \geq 1$, $x_j = y_j$ pour tout $j \in \{-n, \dots, n\}$ entraîne $|h(x) - h(y)| < M\alpha^n$.*

Si h est une telle fonction höldérienne, on a pour tout $x \in X$ et tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\left| h(T^k x) - h(T^k x^{(a)}) \right| < M\alpha^{|k|-1},$$

et donc $\Delta_a h(x)$ est bien défini pour *tout* $x \in X$.

Définition 1.3 *On dit qu'une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est* finitaire à temps de codage d'espérance finie *(FTCEF) si, pour μ-presque tout $x \in X$, il existe un plus petit entier $M(x) \geq 0$ tel que pour tout $y \in X$, $y_j = x_j$ pour tout $j \in \{-M(x), \dots, M(x)\}$ entraîne $f(y) = f(x)$, et si*

$$\int_X M(x)\, d\mu \ < \ +\infty.$$

Notons que si f est FTCEF, pour μ-presque tout x il existe un plus petit entier $N(x)$ tel que, pour $|k| > N(x)$, $M(T^k x) < |k|$. En effet, soit

$$\sigma(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{M(T^k x) \geq |k|}.$$

Comme M est d'espérance finie, on a

$$\int_X \sigma \, d\mu \;=\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu(M \geq |k|) \;=\; 1 + 2\sum_{k\geq 1} \mu(M \geq k) \;<\; +\infty,$$

ce qui prouve que σ est μ-presque sûrement fini. On en déduit que pour μ-presque tout x, $\Delta_a f(x)$ est bien défini et vaut

$$\Delta_a f(x) \;=\; \sum_{k=-N(x)}^{N(x)} \Big(f(T^k x) - f(T^k x^{(a)}) \Big). \tag{1}$$

2 Invariance par cohomologie

Théorème 2.1 *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que, pour une lettre $a \in A$, $\Delta_a f(x)$ soit bien défini pour μ-presque tout x. Alors pour toute fonction g cohomologue à f, $\Delta_a g(x)$ est bien défini pour μ-presque tout x et vérifie*

$$\Delta_a g(x) \;=\; \Delta_a f(x).$$

Preuve — Remarquons tout d'abord que, puisque μ rend les coordonnées indépendantes, pour tout ensemble N μ-négligeable, on a aussi

$$\mu\left(\left\{x \in X \Big/ x^{(a)} \in N\right\}\right) \;=\; 0.$$

Soit φ une fonction de transfert vérifiant, pour μ-presque tout x, $g(x) = f(x) + \varphi(x) - \varphi(Tx)$. Un calcul élémentaire donne, pour μ-presque tout x et tout entier $n \geq 0$,

$$\Delta_a^n g(x) \;=\; \Delta_a^n f(x) + \varphi(T^{-n}x) - \varphi(T^{-n}x^{(a)}) - \Big(\varphi(T^{n+1}x) - \varphi(T^{n+1}x^{(a)})\Big). \tag{2}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. En utilisant le théorème de Lusin, on trouve un compact K_ε de X vérifiant $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon/4$, et tel que $\varphi|_{K_\varepsilon}$ soit continue. Par ergodicité de T, il existe un ensemble négligeable N_ε en dehors duquel $T^{-n}x \in K_\varepsilon$ pour un ensemble d'entiers n de densité au moins $1 - \varepsilon/4$. Puis, pour μ-presque tout x, on a aussi $x^{(a)} \notin N_\varepsilon$. On en déduit l'existence d'un ensemble d'entiers E_1, de densité au moins $1 - \varepsilon/2$, tel que pour tout $n \in E_1$, $T^{-n}x$ et $T^{-n}x^{(a)}$ sont dans K_ε. La fonction de transfert φ étant uniformément continue sur le compact K_ε, on obtient

$$\lim_{\substack{n \longrightarrow +\infty \\ n \in E_1}} \Big(\varphi(T^{-n}x) - \varphi(T^{-n}x^{(a)})\Big) \;=\; 0.$$

Par le même raisonnement, on obtient un ensemble E_2 de densité au moins $1 - \varepsilon/2$, tel que

$$\lim_{\substack{n \longrightarrow +\infty \\ n \in E_2}} \Big(\varphi(T^{n+1}x) - \varphi(T^{n+1}x^{(a)})\Big) \;=\; 0.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, on trouve un ensemble d'entiers $E \overset{\text{déf}}{=} E_1 \cap E_2$ de densité au moins $1 - \varepsilon$, tel que

$$\lim_{\substack{n \longrightarrow +\infty \\ n \in E}} \Big(\Delta_a^n g(x) - \Delta_a^n f(x)\Big) \;=\; 0.$$

Il est alors facile de construire un ensemble E' d'entiers de densité 1 vérifiant la même propriété, d'où le résultat annoncé. $\square$

Remarque

L'hypothèse de l'indépendance des coordonnées sous μ n'est utilisée que pour obtenir la non-singularité de l'application $x \mapsto x^{(a)}$. Le théorème 2.1 s'étend donc à toute probabilité μ ergodique pour laquelle cette propriété est vérifiée. C'est le cas en particulier lorsque μ est *quasi-Bernoulli*, *i.e.* lorsque μ est équivalente à la mesure produit $\mu^- \otimes \mu^+$, où μ^- (respectivement μ^+) est la loi sous μ de $(x_n)_{n<0}$ (respectivement de $(x_n)_{n\geq 0}$). Comme on peut le voir dans [3], la classe de ces mesures quasi-Bernoulli englobe notamment les lois des processus de Markov stationnaires dont les probabilités de transitions sont toutes strictement positives, et plus généralement les mesures de Gibbs (selon la définition donnée par Bowen dans [1]) dont le support est $A^{\mathbb{Z}}$ tout entier. Mais que dire de l'invariance de Δ_a par cohomologie lorsque μ ne satisfait pas l'hypothèse de non-singularité de $x \mapsto x^{(a)}$?

3 Un exemple d'application

Le théorème 2.1 donne une condition nécessaire pour être cohomologue à une fonction FTCEF qui, on le verra ensuite, n'est pas toujours remplie par les fonctions höldériennes.

Proposition 3.1 *Pour qu'une fonction $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ soit cohomologue à une fonction FTCEF, il est nécessaire que pour tout $a \in A$, $\Delta_a g(x)$ soit bien défini pour μ-presque tout x, et que cette fonction ne prenne qu'un nombre* dénombrable *de valeurs.*

Preuve — Si g est une fonction cohomologue à f FTCEF, le théorème 2.1 prouve que pour toute lettre $a \in A$, $\Delta_a g(x)$ est bien défini pour μ-presque tout x, et est égal à $\Delta_a f(x)$. Or, f étant FTCEF, il est facile de voir que f ne peut prendre qu'un nombre dénombrable de valeurs. En utilisant (1), on voit que $\Delta_a f(x) = \Delta_a g(x)$ est une somme finie de valeurs de f, et on en conclut que la fonction $\Delta_a g$ ne peut elle aussi prendre qu'un nombre dénombrable de valeurs. □

Pour répondre négativement à la question posée ci-dessus, il suffit donc de trouver une fonction h höldérienne, telle que pour une lettre a, $\Delta_a h$ prenne un continuum de valeurs. Pour cela, plaçons-nous dans le cas où $A = \{0, 1\}$, et posons

$$h(x) \stackrel{\text{déf}}{=} x_0 \sum_{j\geq 0} \frac{1}{2^j}(1 - x_j) + (1 - x_0) \sum_{j\geq 0} \frac{1}{2^j} x_j.$$

Cette fonction h est clairement höldérienne, et un calcul facile donne, pour $x \in X$ tel que $x_0 = 1$,

$$\Delta_0 h(x) \;=\; 2 - 2 \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ k\neq 0}} \frac{1}{2^{|k|}} x_k.$$

Pour $\mu = P^{\otimes\mathbb{Z}}$ où $P(0) = P(1) = 1/2$, $\Delta_0 h(x)$ est ici la somme de deux variables aléatoires indépendantes, chacune de loi uniforme sur $[0, 1]$. La fonction $\Delta_0 h$ prend donc un continuum de valeurs.

4 Un critère de cohomologie pour les fonctions höldériennes

On se propose maintenant de montrer que si l'on se restreint à la classe des fonctions höldérienne, l'utilisation de Δ_a fournit un critère de cohomologie. Précisons ici que lorsque l'on parle de cohomologie entre deux fonctions höldériennes g et h, l'égalité $g(x) = h(x) + \varphi(x) - \varphi(Tx)$ doit avoir lieu pour *tout* $x \in X$: on ne se réfère plus maintenant à une mesure T-invariante précise.

On a besoin du théorème suivant, donné dans [4].

Théorème 4.1 (Livšic) *Soit $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction höldérienne. Alors h est cohomologue à 0 si et seulement si pour tout $p \geq 1$ et tout $x \in X$ vérifiant $T^p x = x$, on a*

$$f(x) + f(Tx) + \cdots + f(T^{p-1}x) \;=\; 0.$$

De plus, la fonction de transfert est aussi höldérienne.

Théorème 4.2 *Soit $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction höldérienne. On a l'équivalence entre les propriétés suivantes.*

1. *Il existe $c \in \mathbb{R}$ et φ höldérienne tels que $h = c + \varphi - \varphi \circ T$.*
2. *Pour tout $a \in A$ et tout $x \in X$, $\Delta_a h(x) = 0$.*
3. *Il existe $a \in A$ tel que, pour tout $x \in X$, $\Delta_a h(x) = 0$.*

Preuve — Il suffit de montrer que la troisième propriété implique la première. Soit $a \in A$ tel que $\Delta_a h = 0$. On pose $c \stackrel{\text{déf}}{=} h(\ldots, a, a, a, \ldots)$, et pour simplifier on suppose $c = 0$. Soit $x \in X$ vérifiant $T^p x = x$ pour un certain entier $p \geq 1$, et montrons que $f(x) + f(Tx) + \cdots + f(T^{p-1}x) = 0$. Donnons-nous $\varepsilon > 0$, et prenons un entier l assez grand pour que

$$M \sum_{k \geq lp} \alpha^k \;<\; \varepsilon/100,$$

où M et α sont donnés dans la définition de "h höldérienne". Soit ensuite n un entier plus grand que $2l$. On définit le point $y \in X$ par

$$y_j \stackrel{\text{déf}}{=} a \text{ si } -np \leq j \leq np-1, \quad y_j \stackrel{\text{déf}}{=} x_j \text{ sinon.}$$

Grâce à l'hypothèse $\Delta_a h = 0$, on vérifie facilement que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Big(h(T^k x) - h(T^k y) \Big) \;=\; 0. \tag{3}$$

Par choix de l, on a

$$\left| \sum_{k < -(n+l)p} \Big(h(T^k x) - h(T^k y) \Big) \right| + \left| \sum_{k \geq (n+l)p} \Big(h(T^k x) - h(T^k y) \Big) \right| \;<\; \varepsilon/50. \tag{4}$$

En utilisant aussi $h(\ldots, a, a, a, \ldots) = 0$, on obtient de même

$$\left| \sum_{-(n-l)p \leq k < (n-l)p} \Big(h(T^k x) - h(T^k y) \Big) - 2(n-l)\Big(h(x) + \cdots + h(T^{p-1})x \Big) \right| \;<\; \varepsilon/100. \tag{5}$$

On définit également les points x^+ et x^- en posant, pour $j < 0$, $x_j^+ \stackrel{\text{déf}}{=} a$ et $x_j^- \stackrel{\text{déf}}{=} x_j$, et pour $j \geq 0$, $x_j^+ \stackrel{\text{déf}}{=} x_j$ et $x_j^- \stackrel{\text{déf}}{=} a$. Soient alors

$$\Delta^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{-lp \leq k < lp} \Big(h(T^k x) - h(T^k x^+) \Big) ,$$

et

$$\Delta^- \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{-lp \leq k < lp} \Big(h(T^k x) - h(T^k x^-) \Big) .$$

Notons que les quantités Δ^+ et Δ^- ne dépendent pas de n. En utilisant toujours le choix de l et la périodicité de x, on montre enfin

$$\left| \sum_{-(n+l)p \leq k < -(n-l)p} \Big(h(T^k x) - h(T^k y) \Big) - \Delta^+ \right| < \varepsilon/100, \tag{6}$$

et

$$\left| \sum_{(n-l)p \leq k < (n+l)p} \Big(h(T^k x) - h(T^k y) \Big) - \Delta^- \right| < \varepsilon/100. \tag{7}$$

De (3), (4), (5), (6) et (7), on déduit

$$\left| 2(n-l) \Big(h(x) + \cdots + h(T^{p-1})x \Big) + \Delta^- + \Delta^+ \right| < \varepsilon.$$

Cette inégalité étant valable pour tout $n \geq 2l$, on ne peut avoir que

$$\Big(h(x) + \cdots + h(T^{p-1})x \Big) = 0.$$

□

Question

Soit f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}$ telle que pour une (toute ?) lettre $a \in A$, $\Delta_a f(x)$ soit bien défini et nul pour μ-presque tout x. La fonction f est-elle nécessairement cohomologue à une constante ?

Références

[1] Bowen (R.). – *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms.* – Berlin, Springer, 1975, *Lecture Notes in Mathematics*, volume 470.

[2] Kočergin (A.V.). – On the homology of functions over dynamical systems. *Soviet. Math. Dokl.*, vol. 17, 1976, pp. 1637–1641.

[3] Ledrappier (F.). – *Sur la condition de Bernoulli faible et ses applications*, pp. 152–159. – Springer-Verlag, 1976, *Lecture Notes in Mathematics*, volume 532.

[4] Livšic (A.N.). – Cohomology of dynamical systems. *Math. USSR Izv.*, vol. 6, 1972, pp. 1278–1301.