Introduction aux suspensions de Poisson

É. Janvresse, T. de la Rue

Master 2 MFA Rouen 2014-2015

Le but de ce chapitre est d'introduire une classe de systèmes dynamiques d'origine probabiliste : les suspensions de Poisson, construits à partir d'un processus ponctuel aléatoire de Poisson. L'intérêt de ces système réside d'abord dans le lien qu'ils établissent entre la théorie ergodique en mesure infinie et celle en mesure finie. En effet, à chaque système dynamique préservant une mesure σ-finie, on peut associer une suspension de Poisson qui est un système dynamique préservant une mesure de probabilité. Les propriétés de la suspension de Poisson sont intimement liées à celles du système de base auquel elle est associée, et nous allons présenter ici des critères simples sur le système de base pour que la suspension de Poisson soit ergodique, faiblement mélangeante ou mélangeante. Ces critères sont principalement obtenus grâce à l'analyse spectrale de l'opérateur de Koopman associé à la suspension de Poisson, qu'il est possible de réaliser grâce à la décomposition en chaos de l'espace L^2 de la suspension.

1 Suspension de Poisson

1.1 Processus de Poisson

Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace de Lebesgue, où X est un espace métrique complet séparable, $\mathscr{A}$ la σ-algèbre borélienne de X, et μ une mesure σ-finie. On considère l'espace X^* des mesures ponctuelles sur X, *i.e.* les mesures de la forme

$$\eta = \sum_{i\in I} \delta_{x_i},$$

où I est au plus dénombrable, $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$ et telle que tout ensemble borné $A \subset X$ ne contient qu'un nombre fini de points de la famille $(x_i)_{i\in I}$. On munit X^* de la plus petite σ-algèbre $\mathscr{A}^*$ rendant les applications $N_A\ :\ \eta \longmapsto \eta(A)$ mesurables pour tout $A \in \mathscr{A}$ de mesure finie. Enfin, on définit sur $(X^*, \mathscr{A}^*)$ la probabilité μ^*, comme l'unique loi de probabilité sur X^* sous laquelle, pour toute famille d'ensembles $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A}$ de mesure finie et deux à deux disjoints, les variables aléatoires $N_{A_1}, \dots, N_{A_n}$ sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs $\mu(A_1), \dots, \mu(A_n)$:

$$\mu^*\left(N_{A_1} = k_1, \dots, N_{A_n} = k_n\right) = \prod_{j=1}^{n} e^{-\mu(A_j)} \frac{\mu(A_j)^{k_j}}{k_j!}.$$

1.2 Suspension de Poisson associée

Soit T une transformation inversible sur X préservant la mesure μ. On définit alors la transformation associée $T_*\ :\ \eta \in X^* \to \eta \circ T^{-1} \in X^*$. Si on identifie la mesure η à la famille de points $(x_i)_i$, la transformation T_* consiste à bouger chacun des points selon la transformation T : $T_*\eta = \sum_{i\in I} \delta_{Tx_i}$. Comme T préserve la mesure μ, la transformation T_* préserve μ^*.

Le système dynamique $(X^*, \mathscr{A}^*, \mu^*, T_*)$ est appelé *suspension de Poisson* associée au système de base $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$. C'est un système dynamique préservant une mesure de probabilité.

1.3 Propriétés élémentaires

La suspension de Poisson est bien définie même si $\mu(X)$ est de mesure finie, mais dans ce cas elle n'est pas ergodique : en effet dans ce cas le nombre total de points dans l'espace X vus par la configuration η est non constant (c'est une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\mu(X)$), or ce nombre reste invariant par la transformation T_*.

Rappelons qu'un système dynamique $(Y, \mathscr{B}, \nu, S)$ où ν est une mesure de probabilité est (isomorphe à) un *décalage de Bernoulli* si il existe une fonction mesurable f définie sur Y telle que les variables aléatoires $(f \circ S^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ soient indépendantes, et engendrent la σ-algèbre $\mathscr{B}$. Comme toute sous-σ-algèbre de $\mathscr{B}$ est engendrée par une fonction mesurable, un critère pour que le système soit un décalage de Bernoulli est l'existence d'une sous-σ-algèbre $\mathscr{F} \subset \mathscr{B}$ telle que les σ-algèbres $S^{-n}\mathscr{F}$, $n \in \mathbb{Z}$ soient indépendantes, et telle que $\mathscr{B} = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} S^{-n}\mathscr{F}$.

Proposition 1.1. *Si $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ est totalement dissipatif, alors $(X^*, \mathscr{A}^*, \mu^*, T_*)$ est un décalage de Bernoulli.*

Démonstration. Si $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ est totalement dissipatif, on sait qu'il existe un ensemble errant W tel que $X = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} T^{-n}W \mod \mu$. Considérons la σ-algèbre

$$\mathscr{F} := \sigma\big(N_A : A \in \mathscr{A}, \mu(A) < \infty, A \subset W\big).$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$T_*^{-n}\mathscr{F} = \sigma\big(N_A : A \in \mathscr{A}, \mu(A) < \infty, A \subset T^{-n}W\big),$$

et donc

$$\mathscr{A}^* = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} T_*^{-n}\mathscr{F}.$$

De plus, comme W est errant, les $T^{-n}W$ sont disjoints, et par la propriété d'indépendance de la mesure de Poisson, les σ-algèbres $T_*^{-n}\mathscr{F}$ dont indépendantes. Donc $(X^*, \mathscr{A}^*, \mu^*, T_*)$ est un décalage de Bernoulli. □

Exercice 1.1. *Montrer que si X s'écrit comme une réunion disjointe $X_1 \sqcup X_2$, où X_1 et X_2 sont invariants par T, alors T_* est le produit direct des deux suspensions $(X_i^*, (\mu|_{X_i})^*, (T|_{X_i})_*)$, $i = 1, 2$.*

En déduire en utilisant la décomposition de Hopf que T_* se décompose toujours en un produit direct d'un décalage de Bernoulli (possiblement trivial) avec une suspension de Poisson associée à un système de base conservatif.

2 Décomposition en chaos de $L^2(\mu^*)$

Pour comprendre les propriétés spectrales de la suspension de Poisson, on a besoin de comprendre l'action de l'opérateur de Koopman U_{T_*} sur $L^2(\mu^*)$. Un outil fondamental dans ce cadre est la décomposition en chaos.

2.1 Les chaos de $L^2(\mu^*)$

Pour tout ensemble $A \in \mathscr{A}$ de mesure finie, rappelons que $\mathbb{E}_{\mu^*}[N_A] = \mu(A)$, et que pour tout $1 \leq p < \infty$, $\mathbb{E}_{\mu^*}[N_A^p] < \infty$. On note $\overline{N}_A := N_A - \mu(A)$ la projection orthogonale dans $L^2(\mu^*)$ de N_A sur l'orthogonal des fonctions constantes. La variable aléatoire $\overline{N}_A$ appartient à $L^2(\mu^*)$, sa variance vaut $\mathbb{E}_{\mu^*}[\overline{N}_A^2] = \mu(A)$, et pour toute famille finie d'ensembles $A_1, \ldots, A_n$ de mesure finie, le produit $\overline{N}_{A_1} \cdots \overline{N}_{A_n}$ appartient à $L^2(\mu^*)$.

Lemme 2.1. *Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille de sous-ensembles de X deux à deux disjoints de mesure finie, et soit $(B_1, \ldots, B_m)$ une autre famille de sous-ensembles de X deux à deux disjoints de mesure finie. Si $n \neq m$, alors $\overline{N}_{A_1} \cdots \overline{N}_{A_n}$ et $\overline{N}_{B_1} \cdots \overline{N}_{B_m}$ sont orthogonaux dans $L^2(\mu^*)$.*

Démonstration. On considère la partition finie $\mathscr{P}$ de X engendrée par les A_i et les B_j. Chaque $\overline{N}_{A_i}$ peut être écrit comme une somme finie de $\overline{N}_{P_\ell}$, où les P_ℓ sont des atomes de $\mathscr{P}$ de mesure finie. En développant le produit $\overline{N}_{A_1} \cdots \overline{N}_{A_n}$, on obtient une somme de produits de la même forme (chaque produit a toujours n facteurs), mais pour lesquels les ensembles sont des atomes de $\mathscr{P}$. En faisant la même chose avec les B_j, on voit qu'il suffit de prouver le lemme lorsque les A_i et les B_j sont des atomes d'une partition finie. Supposons que $n > m$. Alors il existe un élément de la famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ qui n'appartient pas à l'autre famille (par exemple A_n). Comme A_n est disjoint de tous les autres ensembles, $\overline{N}_{A_n}$ est indépendant du produit $\prod_{1 \leq i < n} \overline{N}_{A_i} \prod_{1 \leq j \leq m} \overline{N}_{B_j}$, et on a

$$\mathbb{E}_{\mu^*}\left[\prod_{1 \leq i \leq n} \overline{N}_{A_i} \prod_{1 \leq j \leq m} \overline{N}_{B_j}\right] = \mathbb{E}_{\mu^*}\left[\overline{N}_{A_n}\right] \mathbb{E}_{\mu^*}\left[\prod_{1 \leq i < n} \overline{N}_{A_i} \prod_{1 \leq j \leq m} \overline{N}_{B_j}\right] = 0.$$

□

Définition 2.2. *On note $H^{(0)}$ le sous-espace de $L^2(\mu^*)$ contenant les variables aléatoires constantes et, pour tout $n \geq 1$, on note $H^{(n)}$ le sous-espace fermé de $L^2(\mu^*)$ engendré par les produits $\overline{N}_{A_1} \cdots \overline{N}_{A_n}$ où $(A_1, \ldots, A_n)$ est une famille de sous-ensembles de X deux à deux disjoints de mesure finie. L'espace $H^{(n)}$ est appelé n-*ème chaos de la suspension de Poisson.

D'après le lemme 2.1, les chaos sont deux à deux orthogonaux.

2.2 Isométrie entre $L^2_{\mathbf{sym}}(X^n, \mathscr{A}^{\otimes n}, \mu^{\otimes n})$ et le n-ème chaos

Pour $n \geq 1$, soit $L^2_{\mathrm{sym}}(X^n, \mathscr{A}^{\otimes n}, \mu^{\otimes n})$ le sous-espace des fonctions de $L^2(X^n, \mathscr{A}^{\otimes n}, \mu^{\otimes n})$ invariantes par permutation des coordonnées. Notons que pour tout $f_1, \ldots, f_n \in L^2(X, \mathscr{A}, \mu)$, la fonction

$$S_{f_1, \ldots, f_n} := \left[(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \prod_{i=1}^{n} f_{\sigma i}(x_i)\right]$$

est dans $L^2_{\mathrm{sym}}(X^n, \mathscr{A}^{\otimes n}, \mu^{\otimes n})$. Lorsque les f_i sont des indicatrices, on notera $S_{A_1, \ldots, A_n}$ au lieu de $S_{\mathbb{1}_{A_1}, \ldots, \mathbb{1}_{A_n}}$.

Théorème 2.3. *Il existe une isométrie entre $L^2_{\mathrm{sym}}(X^n, \mathscr{A}^{\otimes n}, \mu^{\otimes n})$ et le n-ème chaos $H^{(n)}$, qui étend la correspondance*

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} S_{A_1, \ldots, A_n} \longleftrightarrow \overline{N}_{A_1} \cdots \overline{N}_{A_n}$$

(où $A_1, \dots, A_n$ sont des ensembles de mesure finie deux à deux disjoints).

Démonstration. Pour simplifier la rédaction, supposons que $X = \mathbb{R}$ et μ est la mesure de Lebesgue. Pour tout entier $\ell \geq 1$, soit $\mathscr{P}_\ell$ la partition dénombrable de $X = \mathbb{R}$ en intervalles de la forme $\left[j/2^\ell, (j+1)/2^\ell\right)$, $j \in \mathbb{Z}$. Pour toute famille $A_1, \dots, A_n$ d'atomes deux à deux disjoints de $\mathscr{P}_\ell$, on a

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{n!}} S_{A_1,\dots,A_n} \right\|^2_{L^2_{\text{sym}}(\mu^{\otimes n})} = \mu(A_1) \cdots \mu(A_n) = \left\| \overline{N}_{A_1} \cdots \overline{N}_{A_n} \right\|^2_{L^2(\mu^*)}.$$

De plus, si $B_1, \dots, B_n$ sont aussi des atomes deux à deux disjoints de $\mathscr{P}_\ell$, dont au moins un n'apparaît pas parmi $\{A_1, \dots, A_n\}$, alors

$$\begin{aligned}\left\langle S_{A_1,\dots,A_n}, S_{B_1,\dots,B_n} \right\rangle_{L^2_{\text{sym}}(\mu^{\otimes n})} &= \sum_{\sigma,\gamma \in \Sigma_n} \prod_{i=1}^n \mu\left(A_{\sigma_i} \cap B_{\gamma_i}\right) = 0 \\ &= \left\langle \overline{N}_{A_1} \cdots \overline{N}_{A_n}, \overline{N}_{B_1} \cdots \overline{N}_{B_n} \right\rangle_{L^2(\mu^*)}.\end{aligned}$$

Soit V_ℓ le sous-espace de $L^2_{\text{sym}}(\mu^{\otimes n})$ engendré par $S_{A_1,\dots,A_n}$ pour tout n-uplet $(A_1, \dots, A_n)$ d'atomes distincts de $\mathscr{P}_\ell$. Soit W_ℓ le sous-espace de $H^{(n)}$ engendré par les produits $\overline{N}_{A_1} \cdots \overline{N}_{A_n}$ avec la même condition. On peut étendre linéairement la correspondance

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} S_{A_1,\dots,A_n} \;\longleftrightarrow\; \overline{N}_{A_1} \cdots \overline{N}_{A_n}$$

en une isométrie entre V_ℓ and W_ℓ.

Comme $(V_\ell)_{\ell \geq 1}$ et $(W_\ell)_{\ell \geq 1}$ sont des suites croissantes de sous-espaces, et puisque l'isométrie entre $V_{\ell+1}$ et $W_{\ell+1}$ étend l'isométrie entre V_ℓ et W_ℓ, on peut étendre la correspondance en une isometrie entre $\overline{\bigcup_\ell V_\ell} = L^2_{\text{sym}}(\mu^{\otimes n})$ et $\overline{\bigcup_\ell W_\ell} = H^{(n)}$. $\square$

On peut montrer que pour $f \in L^2_{\text{sym}}\left(X^n, \mu^{\otimes n}\right) \cap L^1\left(X^n, \mu^{\otimes n}\right)$, on a via cette isométrie la correspondance

$$f \;\longleftrightarrow\; \left(\eta \mapsto \frac{1}{\sqrt{n!}} \int_{X^n \setminus \Delta_n} f(x_1, \dots, x_n) \Big(\eta(dx_1) - \mu(dx_1)\Big) \cdots \Big(\eta(dx_n) - \mu(dx_n)\Big) \right), \tag{1}$$

où Δ_n est la « diagonale » de X^n, *i.e.* l'ensemble des $(x_1, \dots, x_n)$ tels qu'il existe $i \neq j$ avec $x_i = x_j$. En particulier, si $f_1, \dots, f_n \in L^2(X, \mathscr{A}, \mu) \cap L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$, on a la correspondance

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{n!}} S_{f_1,\dots,f_n} \;\longleftrightarrow \\ &\qquad \left(\eta \mapsto \int_{X^n \setminus \Delta_n} f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \Big(\eta(dx_1) - \mu(dx_1)\Big) \cdots \Big(\eta(dx_n) - \mu(dx_n)\Big) \right).\end{aligned} \tag{2}$$

2.3 Décomposition en chaos

Proposition 2.4. *Pour tout $n \geq 1$ et toute famille $(A_1, \dots, A_n)$ de parties mesurables de X de mesure finie,*

$$N_{A_1} \cdots N_{A_n} \in H^{(0)} \oplus H^{(1)} \oplus \cdots \oplus H^{(n)}.$$

Démonstration. Notons que le résultat est vrai si les $(A_i)_i$ sont deux à deux disjoints : en effet, comme $N_{A_i} = \overline{N}_{A_i} + \mu(A_i)$ pour tout i, en développant le produit $\prod_{i=1}^n N_{A_i}$, on obtient une somme (pondérée) de produits de $\overline{N}_{A_i}$, où chaque produit porte sur au plus n indices et concerne des ensembles deux à deux disjoints. Par définition des chaos, on en déduit que $\prod_{i=1}^n N_{A_i} \in \bigoplus_0^n H^{(i)}$.

En décomposant chaque A_i suivant la partition finie engendrée par la famille $(A_1, \dots, A_n)$, on se ramène au cas où pour chaque $i \neq j$, $A_j = A_i$ ou $A_j \cap A_i = \emptyset$. Nous nous ramenons donc à montrer que pour tout $n \geq 1$, pour tout $1 \leq r \leq n$, pour tous entiers $k_1, \dots, k_r$ avec$\sum_{i=1}^r k_i = n$, et pour tous $A_1, \dots, A_r$ de mesure finie deux à deux disjoints,

$$N_{A_1}^{k_1} \cdots N_{A_r}^{k_r} \in H^{(0)} \oplus H^{(1)} \oplus \cdots \oplus H^{(n)}. \tag{3}$$

Comme dans la démonstration du théorème 2.3, on suppose pour simplifier les notations que $X = \mathbb{R}$, et on considère pour tout entier $\ell \geq 1$, la partition dénombrable $\mathscr{P}_\ell$ de X en intervalles de la forme $\left[j/2^\ell, (j+1)/2^\ell\right)$, $j \in \mathbb{Z}$. Supposons d'abord que les A_i sont $\mathscr{P}_{\ell_0}$-mesurables pour ℓ_0 fixé et montrons (3).

Chaque N_{A_i} peut être écrit comme une somme finie de N_P où P est un atome de $\mathscr{P}_\ell$. Notons $\mathscr{P}_i^\ell$ l'ensemble des atomes de $\mathscr{P}_\ell$ utilisés dans la décomposition de A_i. Si $j \neq i$, $\mathscr{P}_i^\ell \cap \mathscr{P}_j^\ell = \emptyset$. En développant le produit $\prod_{i=1}^r N_{A_i}^{k_i}$, on obtient une somme de termes correspondant chacun au choix d'un atome pour chacun des n facteurs, ce qui revient à choisir une fonction F : $\{1, \dots, n\} \to \bigsqcup_i \mathscr{P}_i^\ell$, vérifiant $F(j) \in \mathscr{P}_i^\ell$ pour chaque $k_1 + \cdots + k_{i-1} < j \leq k_1 + \cdots + k_i$. Notons $\mathscr{F}_\ell$ l'ensemble de toutes ces fonctions, de sorte que

$$\prod_{i=1}^r N_{A_i}^{k_i} = \sum_{F \in \mathscr{F}_\ell} \prod_{j=1}^n N_{F(j)} = \sum_{F \in \mathscr{F}_\ell} \prod_{P \in F(\{1,\dots,n\})} N_P^{|F^{-1}(P)|}.$$

Pour une configuration η fixée, puisque la suite de partitions $(\mathscr{P}_\ell)$ sépare les points de X, pour ℓ assez grand on a $N_P(\eta) \in \{0, 1\}$ pour tout atome $P \in \bigsqcup_i \mathscr{P}_i^\ell$. On obtient ainsi, pour ℓ assez grand (dépendant de la configuration η) :

$$\prod_{i=1}^r N_{A_i}^{k_i}(\eta) = \sum_{F \in \mathscr{F}_\ell} \prod_{P \in F(\{1,\dots,n\})} N_P(\eta).$$

Ceci prouve qu'en introduisant

$$Q_\ell := \sum_{F \in \mathscr{F}_\ell} \prod_{P \in F(\{1,\dots,n\})} N_P,$$

on a

$$Q_\ell \xrightarrow[\ell \to \infty]{\mu^*\text{-p.s.}} \prod_{i=1}^r N_{A_i}^{k_i}.$$

Par ailleurs il est clair que $0 \leq Q_\ell \leq \prod_{i=1}^r N_{A_i}^{k_i}$. On a donc la majoration

$$\left(\prod_{i=1}^r N_{A_i}^{k_i} - Q_\ell \right)^2 \leq \left(\prod_{i=1}^r N_{A_i}^{k_i} \right)^2 \in L^1(\mu^*).$$

Par le théorème de convergence dominée, on a donc aussi

$$Q_\ell \xrightarrow[\ell\to\infty]{L^2(\mu^*)} \prod_{i=1}^r N_{A_i}^{k_i}.$$

Or chaque produit intervenant dans la définition de Q_ℓ porte sur au plus n atomes de $\mathscr{P}_\ell$ deux à deux disjoints. Donc $Q_\ell \in \bigoplus_0^n H^{(i)}$. Comme ce sous-espace est fermé dans $L^2(\mu^*)$, cela montre (3) dans le cas où les A_i sont $\mathscr{P}_{\ell_0}$-mesurables pour un certain ℓ_0.

Pour montrer (3) dans le cas général, on approche chaque A_i par une suite d'ensembles $(A_i^\ell)_\ell$ où A_i^ℓ est $\mathscr{P}_\ell$-mesurable. En considérant une sous-suite si nécessaire, on peut supposer que

$$\sum_\ell \mu(A_i \vartriangle A_i^\ell) < \infty \quad \forall i.$$

Par Borel-Cantelli, ceci implique la convergence presque sûre de $N_{A_i^\ell}$ vers N_{A_i}. Définissons, pour $1 \leq i \leq r$

$$\tilde{A}_i := A_i \cup \bigcup_\ell A_i^\ell = A_i \cup \bigcup_\ell (A_i^\ell \setminus A_i).$$

On a $\mu(\tilde{A}_i) < \infty$, $N_{A_i} \leq N_{\tilde{A}_i}$, et pour tout ℓ, $N_{A_i^\ell} \leq N_{\tilde{A}_i}$. Comme $\prod_i N_{\tilde{A}_i}^{k_i} \in L^2(\mu^*)$, on obtient aussi par convergence dominée

$$\prod_{i=1}^r N_{A_i^\ell}^{k_i} \xrightarrow[\ell\to\infty]{L^2(\mu^*)} \prod_{i=1}^r N_{A_i}^{k_i}.$$

Or on sait déjà que le membre de gauche est, pour tout ℓ, dans la somme des n premiers chaos. Donc sa limite est aussi dans $\bigoplus_0^n H^{(i)}$. □

D'après le lemme précédent, toute variable aléatoire qui peut s'écrire comme un polynôme de degré n en variables de la forme N_{A_i} appartient à $H^{(0)} \oplus \cdots \oplus H^{(n)}$. D'après le théorème de Stone-Weierstrass, on peut approximer (dans $L^2(\mu^*)$) toute fonction mesurable bornée d'un nombre fini de variables de la forme N_{A_i} par un tel polynôme. Ces fonctions formant un sous-espace dense dans $L^2(\mu^*)$, on obtient le théorème suivant.

Théorème 2.5. *La somme directe des chaos engendre $L^2(\mu^*)$, i.e. on a la décomposition*

$$L^2(\mu^*) = \bigoplus_{n\geq 0} H^{(n)}. \tag{4}$$

3 Propriétés spectrales d'une suspension de Poisson

La décomposition en chaos que l'on vient de voir permet de complètement décrire l'action de l'opérateur de Koopman $U_{T_*} : L^2(\mu^*) \to L^2(\mu^*)$ en fonction de celle de l'opérateur $U_T : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$. Ainsi les propriétés spectrales d'une suspension de Poisson peuvent se déduire de celles de la transformation T agissant sur l'espace de base $(X, \mathscr{A}, \mu)$. L'objet de cette partie du cours est précisément de fournir des critères simples sur T donnant respectivement l'ergodicité, le mélange faible ou le mélange de T_*.

Dans la suite, on notera σ_{T_*} le type spectral maximal de T_*, et σ_T celui de T. Attention, si $\mu(X) = \infty$, il n'y a pas de fonction constante non nulle dans $L^2(\mu)$, et dans ce cas σ_T est défini comme le type spectral maximal de l'action de U_T sur *tout* $L^2(\mu)$.

Dans un premier temps, notons que l'opérateur unitaire U_T défini sur $L^2(\mu)$ s'étend pour tout $n \geq 1$ à un opérateur unitaire $(U_T)^{\odot n}$ sur $L^2(X^n, \mu^{\otimes n})$ par la formule

$$(U_T)^{\odot n} f = f \circ T^{\times n},$$

où $T^{\times n}(x_1, \ldots, x_n) := (Tx_1, \ldots, Tx_n)$. Clairement, $L^2_{\text{sym}}(X^n, \mathscr{A}^{\otimes n}, \mu^{\otimes n})$ est un sous-espace stable par $(U_T)^{\odot n}$ de $L^2(X^n, \mu^{\otimes n})$.

Lemme 3.1. *Le type spectral maximal de* $(U_T)^{\odot n}|_{L^2_{\text{sym}}(X^n, \mathscr{A}^{\otimes n}, \mu^{\otimes n})}$ *est* $(\sigma_T)^{*n}$.

Démonstration. On sait qu'il existe $f \in L^2(\mu)$ dont la mesure spectrale est σ_T. Alors la mesure spectrale σ_F de la fonction $F \in L^2_{\text{sym}}(X^n, \mathscr{A}^{\otimes n}, \mu^{\otimes n})$ définie par $F(x_1, \ldots, x_n) := \prod_1^n f(x_i)$ vérifie, pour tout entier p, $\widehat{\sigma_F}(p) = \widehat{\sigma_T}(p)^n = \widehat{(\sigma_T)^{*n}}(p)$. Donc $\sigma_F = (\sigma_T)^{*n}$. Par ailleurs, montrons que la mesure spectrale σ_G d'une fonction $G \in L^2(\mu^{\otimes n})$ pour l'action de $(U_T)^{\odot n}$ est absolument continue par rapport à $(\sigma_T)^{*n}$. C'est vrai lorsque G est de la forme $G(x_1, \ldots, x_n) = \prod g_i(x_i)$ avec les g_i dans $L^2(\mu)$, car alors $\sigma_G = \sigma_{g_1} * \cdots * \sigma_{g_n}$. Puis on utilise le fait que le sous-espace engendré par les fonctions de cette forme est dense dans $L^2(\mu^{\otimes n})$, et que l'ensemble des fonctions dont la mesure spectrale est absolument continue par rapport à une mesure donnée est fermé dans $L^2(\mu^{\otimes n})$. □

Considérons maintenant l'action de U_{T_*} sur chaque chaos. Par définition, le n-ème chaos est engendré par les produits $\overline{N}_{A_1} \ldots \overline{N}_{A_n}$ où les A_i sont deux à deux disjoints. Or, on a

$$U_{T_*}(\overline{N}_{A_1} \ldots \overline{N}_{A_n}) = (\overline{N}_{A_1} \ldots \overline{N}_{A_n}) \circ T_* = \overline{N}_{T^{-1}A_1} \ldots \overline{N}_{T^{-1}A_n}$$

qui est aussi dans $H^{(n)}$ puisque les $T^{-1}A_i$ sont deux à deux disjoints. Ainsi, pour tout $n \geq 0$, $H^{(n)}$ est stable par U_{T_*}. Par ailleurs, $U_{T_*}(\overline{N}_{A_1} \ldots \overline{N}_{A_n})$ correspond via l'isométrie entre $H^{(n)}$ et $L^2_{\text{sym}}(X^n, \mathscr{A}^{\otimes n}, \mu^{\otimes n})$ du théorème 2.3 à $\frac{1}{\sqrt{n!}} S_{T^{-1}A_1, \ldots, T^{-1}A_n} = (U_T)^{\odot n} \left(\frac{1}{\sqrt{n!}} S_{A_1, \ldots, A_n} \right)$. Donc on peut identifier via cette isométrie $U_{T_*}|_{H^{(n)}}$ et $(U_T)^{\odot n}|_{L^2_{\text{sym}}(X^n, \mathscr{A}^{\otimes n}, \mu^{\otimes n})}$. Grâce au lemme 3.1, on en déduit que le type spectral maximal de $U_{T_*}|_{H^{(n)}}$ est $(\sigma_T)^{*n}$, puis la forme du type spectral maximal de T_*, donné dans la proposition suivante.

Proposition 3.2. *Le type spectral maximal de* T_* *est*

$$\sigma_{T_*} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} (\sigma_T)^{*n}.$$

Remarque : les coefficients $\frac{1}{n!}$ apparaissant dans la formule ci-dessus sont purement arbitraires, puisque le type spectral maximal n'est défini qu'à équivalence des mesures près. Néanmoins, cette expression a l'avantage de définir une mesure finie σ_{T_*} dès que σ_T est elle-même une mesure finie sur $\mathbb{T}$.

Théorème 3.3. *Soit* $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ *un système dynamique en mesure infinie.*

1. $(X^*, \mathscr{A}^*, \mu^*, T_*)$ *est ergodique si et seulement si il n'existe pas de partie* A *de* X, *invariante par* T, *telle que* $0 < \mu(A) < \infty$. *Dans ce cas,* $(X^*, \mathscr{A}^*, \mu^*, T_*)$ *est automatiquement faiblement mélangeant.*
2. $(X^*, \mathscr{A}^*, \mu^*, T_*)$ *est mélangeant si et seulement si* $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ *est de type zéro.*

Démonstration. 1. Supposons d'abord qu'il existe $A \subset X$ invariant par T, de mesure $0 < \mu(A) < \infty$. Alors N_A est une fonction non constante dans $L^2(\mu^*)$ qui est invariante par T_*, donc T_* n'est pas ergodique. Inversement, supposons que T_* n'est pas faiblement mélangeant. Alors il existe $t \in \mathbb{T}$ avec $\sigma_{T_*}(\{t\}) > 0$, et donc tel que pour un certain $n \geq 1$, $(\sigma_T)^{*n}(\{t\}) > 0$. Mais alors σ_T n'est pas continue, et donc il existe $s \in \mathbb{T}$ avec $\sigma_T(\{s\}) > 0$. Puis il existe $f \in L^2(\mu)$, $f \neq 0$, telle que $U_T f = e^{i2\pi s} f$, en particulier f vérifie $|f| \circ T = |f|$. Pour tout $\varepsilon > 0$, considérons l'ensemble

$$A_\varepsilon := \{x \in X : |f(x)| > \varepsilon\}.$$

Comme $|f|$ est invariant par T, A_ε est lui-même invariant par T. On a $\mu(A_\varepsilon) < \infty$ car $\int_X |f|^2 \, d\mu < \infty$, et comme $f \neq 0$, $\mu(A_\varepsilon) > 0$ pour ε suffisamment proche de 0.

2. En utilisant la proposition 3.2, on obtient les équivalences

$$\begin{aligned}
T_* \text{ mélangeant} &\iff \widehat{\sigma_{T_*}}(p) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0 \\
&\iff \forall n \geq 1, \widehat{(\sigma_T)^{*n}}(p) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0 \\
&\iff \widehat{\sigma_T}(p) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0 \\
&\iff \forall f \in L^2(\mu), \widehat{\sigma_f}(p) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0 \\
&\iff T \text{ est de type zéro.}
\end{aligned}$$

(La dernière équivalence se montre de la même façon que dans le cas T mélangeant en mesure finie.)

$\square$