

# Mélange fort, mélange faible

T. de la Rue

Master 2 MFA Rouen 2015-2016

On considère toujours un système dynamique de la forme  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ , où  $T$  est un automorphisme de l'espace probabilisé de Lebesgue  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Le but de ce chapitre est d'étudier un peu plus en détails la notion de mélange, ainsi qu'une notion intermédiaire entre le mélange et l'ergodicité, appelée le *mélange faible*.

## 1 Le mélange fort

Commençons par rappeler la définition d'un système mélangeant.

**Définition 1.1.** *Le système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  est dit mélangeant si pour tous  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$ ,*

$$\mu(A \cap T^{-j}B) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mu(A)\mu(B). \quad (1)$$

*Remarque :* on dit aussi *fortement* mélangeant, par opposition avec la propriété du mélange dit *faible*, qui sera présentée ultérieurement.

### 1.1 Le mélange est une propriété spectrale

Tout comme pour l'ergodicité, la propriété de mélange est *spectrale* : elle peut se caractériser au moyen de l'opérateur de Koopman  $U_T$  associé à  $T$  sur  $L^2(\mu)$  pour savoir si  $T$  est mélangeant ou non.

**Proposition 1.2.** *Soit  $T$  un automorphisme de l'espace de Lebesgue  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1)  $T$  est fortement mélangeant.
- (2) Pour tous  $f$  et  $g$  dans  $L^2(\mu)$ ,

$$\langle f, U_T^n g \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle = \int f d\mu \int \bar{g} d\mu.$$

- (3) Pour tout  $f \in L^2(\mu)$ ,

$$\langle f, U_T^n f \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle = \left| \int f d\mu \right|^2.$$

*Démonstration.* (2)  $\implies$  (1) car il suffit d'appliquer (2) à  $f = \mathbb{1}_A$  et  $g = \mathbb{1}_B$  pour  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$ .

(1)  $\implies$  (3) car on déduit facilement de (1) la validité de (3) lorsque  $f$  est une fonction simple. Par ailleurs, un argument simple montre que l'ensemble des  $f \in L^2(\mu)$  qui vérifient

(3) est fermé. Comme l'ensemble des fonctions simples est dense dans  $L^2(\mu)$ , on obtient bien (3) pour tout  $f \in L^2(\mu)$ .

(3)  $\implies$  (2) : pour  $f \in L^2(\mu)$ , notons  $H_f$  le plus petit sous-espace vectoriel fermé de  $L^2(\mu)$  contenant 1 et les  $U_T^n f$ ,  $n \geq 0$ . Alors l'ensemble

$$F_f := \left\{ g \in L^2(\mu) : \langle U_T^n f, g \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle \right\}$$

est un sous-espace vectoriel fermé de  $L^2(\mu)$ , qui contient 1,  $f$  (à cause de (3)), et même tous les  $U_T^n f$ ,  $n \geq 0$ . On a donc  $H_f \subset F_f$ . Par ailleurs, si  $g$  est orthogonal à  $H_f$ , on a pour tout  $n \geq 0$ ,  $\langle U_T^n f, g \rangle = 0$  et  $\langle g, 1 \rangle = 0$ , d'où aussi  $g \in F_f$ . Ainsi,  $F_f$  contient à la fois  $H_f$  et  $H_f^\perp$ , d'où  $F_f = L^2(\mu)$ .  $\square$

## 1.2 Caractérisation du mélange par le type spectral maximal

**Lemme 1.3** (Riemann-Lebesgue généralisé). *Soit  $\sigma$  une mesure positive finie sur  $\mathbb{T}$  telle que  $\widehat{\sigma}(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Alors, pour toute mesure  $\nu \ll \sigma$ , on a aussi  $\widehat{\nu}(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .*

*Démonstration.* On considère d'abord le cas où  $\varphi := d\nu/d\sigma$  est un polynôme trigonométrique, cas dans lequel la conclusion est immédiate. Le cas général s'en déduit en utilisant la densité des polynômes trigonométriques dans  $L^1(\sigma)$ .  $\square$

**Proposition 1.4.** *Soit  $T$  un automorphisme de l'espace de Lebesgue  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , et soit  $\sigma_{\max}$  une mesure positive finie dans la classe d'équivalence du type spectral maximal de  $T$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1)  $T$  est fortement mélangeant.
- (2) Pour tout  $f \in L_0^2(\mu)$ ,  $\widehat{\sigma}_f(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .
- (3)  $\widehat{\sigma}_{\max}(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

*Démonstration.* L'équivalence entre (1) et (2) est une reformulation de l'équivalence (1)  $\iff$  (3) de la proposition 1.2. L'implication (2)  $\implies$  (3) est une conséquence immédiate de l'existence de  $f \in L_0^2$  telle que  $\sigma_f = \sigma_{\max}$ . Pour (3)  $\implies$  (2), on utilise le lemme 1.3.  $\square$

*Cas particulier :* on dit que  $T$  a spectre de Lebesgue si le type spectral maximal de  $T$  est (la classe d'équivalence de) la mesure de Lebesgue. La proposition 1.4 prouve que le spectre de Lebesgue entraîne le mélange.

## 2 Le mélange faible

Rappelons qu'une transformation  $T$  sur  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  est ergodique si et seulement si, pour tous  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-j}B) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu(A)\mu(B). \quad (2)$$

Cette convergence est en fait la convergence au sens de Cesàro de  $\mu(A \cap T^{-n}B)$  vers  $\mu(A)\mu(B)$ .

Entre cette convergence au sens de Cesàro qui caractérise l'ergodicité, et la convergence classique (1) qui caractérise le mélange, on peut introduire une troisième propriété, appelée convergence au sens de Cesàro fort. La propriété du système dynamique ainsi caractérisée est ce que l'on appelle le mélange faible.

**Définition 2.1.** Le système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  est dit faiblement mélangeant si, pour tous  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$ , on a

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |\mu(A \cap T^{-j}B) - \mu(A)\mu(B)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (3)$$

En comparant la propriété ci-dessus à (2), et en appliquant l'inégalité triangulaire, on voit clairement que le mélange faible entraîne l'ergodicité.

Tout comme l'ergodicité et le mélange, la propriété du mélange faible est aussi une propriété spectrale. On démontre par les mêmes arguments l'analogie du théorème 1.2, qui caractérise cette fois le mélange faible par l'action de  $U_T$ .

**Théorème 2.2.** Les propriétés suivantes du système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  sont équivalentes.

- (1)  $T$  est faiblement mélangeant.
- (2) Pour tous  $f$  et  $g$  dans  $L^2(\mu)$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \langle U_T^j f, g \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

- (3) Pour tout  $f \in L^2(\mu)$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \langle U_T^j f, f \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

## 2.1 Mélange sur une sous-suite de densité 1

Rappelons qu'une partie  $N$  de  $\mathbb{N}$  est dite *de densité 1* si

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_N(j) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

**Lemme 2.3.** Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite bornée de réels. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (1)  $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .
- (2) Il existe une partie  $N$  de  $\mathbb{N}$ , de densité 1, avec

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in N}} a_n = 0.$$

- (3)  $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

Preuve laissée en exercice...

Comme application immédiate de ce lemme, on obtient le résultat suivant.

**Théorème 2.4.** Les propriétés suivantes du système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  sont équivalentes.

- (1)  $T$  est faiblement mélangeant.
- (2) Pour tous  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$ , on peut trouver une partie  $N(A, B)$  de  $\mathbb{N}$ , de densité 1, telle que

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in N(A, B)}} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B).$$

- (3) Pour tous  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \mu(A \cap T^{-j}B) - \mu(A)\mu(B) \right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

**Exercice 2.5.** Soit  $(N_k)_{k \geq 1}$  une famille dénombrable de parties de  $\mathbb{N}$ , chacune de densité 1. Prouver qu'il existe une famille  $(n_k)_{k \geq 1}$  d'entiers naturels et une partie  $N \subset \mathbb{N}$  de densité 1 vérifiant, pour tout  $k \geq 1$ ,  $N \cap [n_k, +\infty) \subset N_k$ .

Puisque l'on travaille dans un espace de Lebesgue, on dispose d'une famille dénombrable  $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$  dense dans  $\mathcal{A}$  (pour la distance  $d(A, B) := \mu(A \Delta B)$ ). À l'aide de la famille dénombrable de parties de densité 1  $(N(B_i, B_j))_{(i, j) \in \mathbb{N}^2}$  et du résultat de l'exercice ci-dessus, on peut construire une nouvelle partie  $N$  de densité 1 dans  $\mathbb{N}$ , qui marche pour tous les couples  $(B_i, B_j)$ . On en déduit alors facilement que pour tous  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$ ,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in N}} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B).$$

D'où la nouvelle caractérisation du mélange faible, comme une propriété de mélange sur une sous-suite d'entiers de densité 1.

**Théorème 2.6.** Le système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  est faiblement mélangeant si et seulement si il existe une partie  $N$  de  $\mathbb{N}$ , de densité 1, avec pour tous  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$ ,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in N}} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B).$$

## 2.2 Mélange faible et valeurs propres

Nous allons maintenant présenter une application des mesures spectrales à la théorie ergodique : la caractérisation du mélange faible de  $T$  par l'absence de valeurs propres (autres que 1) pour  $U_T$ . Voyons tout d'abord quelques propriétés élémentaires des valeurs propres d'un automorphisme d'un espace de Lebesgue.

**Lemme 2.7.** Si  $\alpha$  est une valeur propre de  $U_T$ , alors  $|\alpha| = 1$ . Si de plus  $\alpha \neq 1$ , toute fonction propre associée à la valeur propre  $\alpha$  est d'intégrale nulle. Enfin, si  $T$  est ergodique toute fonction propre est de module constant.

*Démonstration.* Soit  $f$  une fonction propre associée à la valeur propre  $\alpha$  :  $f \circ T = \alpha f$ . Par conservation de la mesure, on a

$$\int_X |f| d\mu = \int_X |f \circ T| d\mu = |\alpha| \int_X |f| d\mu,$$

et comme  $f \neq 0$ ,  $|\alpha| = 1$ . On peut aussi écrire

$$\int_X f d\mu = \int_X f \circ T d\mu = \alpha \int_X f d\mu,$$

d'où nécessairement, si  $\alpha \neq 1$ ,

$$\int_X f d\mu = 0.$$

Enfin, puisque  $|f| \circ T = |\alpha||f| = |f|$ , l'ergodicité de  $T$  implique  $|f| = \text{constante}$ .  $\square$

**Définition 2.8.** On dit que  $T$  est à spectre continu si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée.

- La seule valeur propre de  $U_T$  est 1, et l'espace propre associé est réduit aux fonctions constantes.
- $T$  est ergodique, et 1 est la seule valeur propre de  $U_T$ .
- Pour tout  $f \in L^2_0(\mu)$ , la mesure spectrale  $\sigma_f$  est continue, c'est-à-dire donne une masse nulle à chaque singleton de  $\mathbb{T}$ .
- Le type spectral maximal de  $T$  est continu, c'est-à-dire ne charge aucun singleton de  $\mathbb{T}$ .

**Exercice 2.9.** Vérifier l'équivalence des quatre conditions de la définition ci-dessus.

**Théorème 2.10.**  $T$  est faiblement mélangeant si et seulement si  $T$  est à spectre continu.

*Démonstration.* Supposons d'abord  $T$  faiblement mélangeant, et soit  $f \in L^2(\mu)$  avec  $U_T f = \alpha f$ . Si  $\alpha = 1$ , comme  $T$  est ergodique,  $f$  est une constante. Si  $\alpha \neq 1$ , on a  $\int f d\mu = 0$ , et donc grâce à la propriété de mélange faible,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \langle U_T^j f, f \rangle \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

d'où

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \langle \alpha^j f, f \rangle \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Mais comme  $|\alpha| = 1$ , on en déduit  $\langle f, f \rangle = 0$  : il n'y a donc pas d'autre valeur propre que 1.

Réciproquement, supposons  $T$  à spectre continu. Pour montrer le mélange faible, il suffit de montrer que pour tout  $f \in L^2(\mu)$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \langle U_T^j f, f \rangle - \langle f, 1 \rangle \langle 1, f \rangle \right|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4)$$

Si  $f$  est constante, (4) est toujours vérifié. Il suffit donc de considérer le cas où  $f$  est orthogonale à 1, c'est-à-dire d'intégrale nulle. On doit alors montrer

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \langle U_T^j f, f \rangle \right|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Mais comme  $T$  est à spectre continu, on sait que  $\sigma_f$  est continue ; il suffit donc de vérifier que si  $\sigma$  est une mesure continue sur  $\mathbb{T}$ , alors

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{\mathbb{T}} e^{i2\pi jt} d\sigma(t) \right|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left| \int_{\mathbb{T}} e^{i2\pi jt} d\sigma(t) \right|^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left( \int_{\mathbb{T}} e^{i2\pi jt} d\sigma(t) \cdot \int_{\mathbb{T}} e^{-ijt} d\sigma(t) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} e^{i2\pi j(t_1 - t_2)} d(\sigma \otimes \sigma)(t_1, t_2) \\ &= \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left( e^{i2\pi(t_1 - t_2)} \right)^j \right) d(\sigma \otimes \sigma)(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Or, si  $t_1 \neq t_2$ , on a

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left( e^{i2\pi(t_1 - t_2)} \right)^j = \frac{1}{n} \frac{1 - e^{i2\pi n(t_1 - t_2)}}{1 - e^{i2\pi(t_1 - t_2)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Puisque la mesure  $\sigma$  est supposée continue,  $\sigma \otimes \sigma$  donne une masse nulle à

$$\{(t_1, t_2) \in \mathbb{T} \times \mathbb{T} : t_1 = t_2\}.$$

On a donc  $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left( e^{i2\pi(t_1 - t_2)} \right)^j \rightarrow 0$ ,  $(\sigma \otimes \sigma)$ -presque sûrement sur  $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$ . Comme c'est, en module, majoré par 1, le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de conclure.  $\square$

### 2.3 Mélange faible et ergodicité de $T \times T$

Si  $T$  est un endomorphisme de l'espace de Lebesgue  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , on définit sur l'espace de Lebesgue produit  $(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu)$  l'endomorphisme  $T \times T : (x_1, x_2) \mapsto (Tx_1, Tx_2)$ . Ce n'est pas parce que  $T$  est ergodique que  $T \times T$  doit l'être, comme le montre le contre-exemple suivant.

**Proposition 2.11.** *Soit  $T$  une rotation irrationnelle sur le cercle unité de  $\mathbb{C}$ . Alors  $T$  est ergodique, mais  $T \times T$  ne l'est pas.*

*Démonstration.* On représente de façon usuelle la rotation irrationnelle d'angle  $2\pi\alpha$  par l'addition de  $\alpha$  modulo 1 sur le tore  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  identifié à  $[0, 1]$ . Pour montrer que  $T \times T$  n'est pas ergodique, il suffit de trouver une application  $f : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  non presque sûrement constante, et qui soit  $T \times T$ -invariante. Pour cela, il suffit de considérer  $f$  définie par  $f(x_1, x_2) := x_1 - x_2$ . Alors  $f$  n'est pas constante, mais  $f \circ (T \times T)(x_1, x_2) = (x_1 + \alpha) - (x_2 + \alpha) = f(x_1, x_2)$ .  $\square$

Une des applications remarquables du mélange faible est justement de caractériser l'ergodicité de  $T \times T$ .

**Théorème 2.12.** *Les propriétés suivantes du système dynamique  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  sont équivalentes.*

- (1)  $T$  est faiblement mélangeant.
- (2)  $T \times T$  est ergodique.
- (3)  $T \times T$  est faiblement mélangeant.

*Démonstration.* On montre d'abord (1)  $\implies$  (3). Puisque  $T$  est faiblement mélangeant, en utilisant le théorème 2.4 on trouve une partie  $N$  de densité 1 dans  $\mathbb{N}$ , telle que pour  $A, B, C$  et  $D$  dans  $\mathcal{A}$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in N}} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B)$$

et

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in N}} \mu(C \cap T^{-n}D) = \mu(C)\mu(D).$$

On en déduit immédiatement

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in N}} \mu \otimes \mu(A \times C \cap (T \times T)^{-n}(B \times D)) = \mu \otimes \mu(A \times C)\mu \otimes \mu(B \times D),$$

d'où, grâce au lemme 2.3

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |\mu \otimes \mu(A \times C \cap (T \times T)^{-j}(B \times D)) - \mu \otimes \mu(A \times C)\mu \otimes \mu(B \times D)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (5)$$

Puisque les pavés de type  $A \times C$ , avec  $A$  et  $C$  dans  $\mathcal{A}$ , forment une semi-algèbre qui engendre  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ , on en déduit que la convergence (5) a toujours lieu si on remplace les pavés  $A \times C$  et  $B \times D$  par n'importe quels ensembles mesurables dans  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ .

(3)  $\implies$  (2) est évident. Il reste à montrer (2)  $\implies$  (1). On laisse en exercice le soin de vérifier que  $T \times T$  étant ergodique,  $T$  l'est aussi. On a donc, pour  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{A}$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-j}B) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A)\mu(B).$$

Par ailleurs, en appliquant l'ergodicité de  $T \times T$  aux pavés  $A \times A$  et  $B \times B$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\mu(A \cap T^{-j}B))^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu \otimes \mu(A \times A \cap (T \times T)^{-j}(B \times B)) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu \otimes \mu(A \times A)\mu \otimes \mu(B \times B) \\ &= \mu(A)^2\mu(B)^2. \end{aligned}$$

On en déduit aisément

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\mu(A \cap T^{-j}B) - \mu(A)\mu(B))^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

et donc  $T$  est faiblement mélangeant par le théorème 2.4. □

### Complément : ergodicité du produit de deux systèmes dynamiques

Le théorème 2.12 peut se généraliser au produit de deux systèmes dynamiques ergodiques  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  et  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  : la condition d'ergodicité d'un tel produit étant que  $T$  et  $S$  n'aient pas de valeur propre commune (en dehors évidemment de la valeur propre 1 attachée aux fonctions constantes). Pour le démontrer, on utilise un résultat sur les valeurs propres contenu dans le lemme qui suit.

**Lemme 2.13.** *L'ensemble des valeurs propres d'un automorphisme ergodique d'un espace de Lebesgue forme un sous-groupe multiplicatif du cercle unité.*

*Démonstration.* Si  $\alpha$  est une valeur propre de  $U_T$  attachée à la fonction propre  $f$ ,  $\alpha^{-1} = \bar{\alpha}$  est aussi une valeur propre de  $U_T$ , attachée à la fonction propre  $\bar{f}$ . Si de plus  $\beta$  est une autre valeur propre, attachée à la fonction propre  $g$ , alors  $(fg) \circ T = \alpha\beta(fg)$  ; comme  $f$  et  $g$  sont de module constant (voir le lemme 2.7),  $fg \in L^2$  et c'est donc une fonction propre associée à la valeur propre  $\alpha\beta$ . □

**Théorème 2.14.** *Soient  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  et  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  deux systèmes dynamiques ergodiques. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1) *La seule valeur propre commune à  $U_S$  et  $U_T$  est 1.*
- (2) *Le système dynamique produit  $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu, T \times S)$  est ergodique.*

*Démonstration.* On montre d'abord que (2)  $\implies$  (1) en remarquant que si  $\alpha$  est une valeur propre commune à  $U_T$  et  $U_S$ , attachée respectivement aux fonctions propres  $f \in L^2(\mu)$  et  $g \in L^2(\nu)$ , alors  $f \otimes \bar{g} \circ T \times S = f \otimes \bar{g}$ . Si  $T \times S$  est ergodique, cela implique  $f \otimes \bar{g} = \text{constante}$ , ce qui n'est possible que si  $f$  et  $g$  sont déjà constantes, c'est-à-dire si  $\alpha = 1$ .

Pour montrer que (1)  $\implies$  (2), on commence par vérifier que pour  $f \in L^2_0(\mu)$  et  $g \in L^2_0(\nu)$ ,

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \otimes g \circ (T \times S)^k \right\|_{L^2(\mu \otimes \nu)}^2 = \int_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i2\pi k(t+s)} \right|^2 d\sigma_f \otimes \sigma_g.$$

Or, puisque  $U_S$  et  $U_T$  n'ont pas de valeur propre commune autre que 1, il n'existe pas de  $t \in \mathbb{T}$  tel que l'on ait à la fois  $\sigma_f(\{t\}) > 0$  et  $\sigma_g(\{-t\}) > 0$  (ici on utilise le fait que si  $\alpha$  est valeur propre, alors  $\bar{\alpha}$  est aussi valeur propre : voir le lemme 2.13). Par un argument similaire à celui utilisé dans la preuve du théorème 2.10, on en déduit que

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \otimes g \circ (T \times S)^k \right\|_{L^2(\mu \otimes \nu)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Le soin est laissé au lecteur d'en déduire l'ergodicité de  $T \times S$ . □

## 3 La transformation de Chacon

Il est évident par définition de chacune des propriétés que le mélange entraîne le mélange faible, qui lui-même entraîne l'ergodicité. Par ailleurs, nous connaissons déjà un exemple de système dynamique qui soit ergodique mais pas faiblement mélangeant. En effet, il suffit de

considérer une rotation irrationnelle (représentée comme l'addition d'un nombre irrationnel  $\alpha$  sur le tore  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ), de remarquer que la fonction  $f : t \mapsto e^{i2\pi t}$  est une fonction propre pour  $U_T$  associée à la valeur propre  $e^{i2\pi\alpha} \neq 1$ , et d'appliquer le théorème 2.10.

Le but de cette section est de donner un exemple explicite de système dynamique qui soit faiblement mélangeant, mais non mélangeant. Ce sera aussi l'occasion d'introduire une méthode de construction géométrique de systèmes dynamique, appelée *découpage et empilage* (traduction de l'anglais *cutting and stacking*), par laquelle la transformation est définie en construisant des tours de Rokhlin successives. La transformation de Chacon que nous allons définir maintenant est un cas particulier de transformation de *rang un* (à chaque étape de la construction, on n'a qu'une seule tour de Rokhlin). La classe des transformations de rang un est particulièrement intéressante à étudier, car elle permet de construire facilement des systèmes dynamiques ayant des propriétés remarquables.

### 3.1 Construction par découpage et empilage

Commençons par considérer un intervalle  $I_0 := [0, \ell)$  pour un certain  $\ell > 0$  qui sera précisé ultérieurement. La première opération de découpage consiste à partager  $I_0$  en 3 sous-intervalles de même longueur  $I_1 := [0, \ell/3)$ ,  $I'_1 := [\ell/3, 2\ell/3)$  et  $I''_1 := [2\ell/3, \ell)$ . On utilise aussi un quatrième intervalle de même longueur  $\ell/3$  :  $E_1 := [\ell, \ell + \ell/3)$ . L'empilage consiste ensuite à représenter ces quatre intervalles les uns au-dessus des autres, dans l'ordre (de bas en haut)  $I_1, I'_1, E_1, I''_1$ . On définit alors la transformation  $T$  sur  $I_1 \sqcup I'_1 \sqcup E_1$  en associant chaque point de ces trois intervalles au point immédiatement au-dessus de lui dans le diagramme. À cette étape, nous avons donc une tour de Rokhlin  $(I_1, TI_1, T^2I_1)$  mais la transformation  $T$  n'est pas encore définie sur l'étage  $E_1 = T^3I_1$ , le plus élevé de cette tour.

La construction se poursuit par induction : après l'étape  $n$ , on a une tour de Rokhlin

$$(I_n, TI_n, \dots, T^{h_n-1}I_n).$$

Ses étages  $T^jI_n$  sont des intervalles de longueur  $\ell/3^n$ , dont la réunion est  $[0, \theta_n\ell)$  pour un certain  $\theta_n \geq 1$ . La transformation  $T$  est définie sur tous les étages sauf le dernier, en envoyant chaque point sur le point immédiatement au-dessus de lui dans le dessin de la tour, c'est-à-dire en envoyant  $T^jI_n$  sur  $T^{j+1}I_n$  de manière affine et croissante. On découpe chacun de ces intervalles en trois sous-intervalles de longueur  $\ell/3^{n+1}$ , ce qui revient à découper la tour de Rokhlin en trois sous-colonnes. On considère également un intervalle supplémentaire  $E_{n+1} := [\theta_n\ell, \theta_n\ell + \ell/3^{n+1})$  (usuellement appelé *espaceur*, ou *spacer* en anglais), de longueur  $\ell/3^{n+1}$ . On empile ensuite les trois sous-colonnes et l'espaceur dans l'ordre suivant : première sous-colonne, deuxième sous-colonne, espaceur, troisième sous-colonne. Pour la transformation, cela signifie qu'on l'étend à l'étape  $n+1$  de la façon suivante :

- l'étage supérieur de la première sous-colonne est envoyé sur l'étage inférieur de la deuxième sous-colonne,
- l'étage supérieur de la deuxième sous-colonne est envoyé sur  $E_{n+1}$ ,
- $E_{n+1}$  est envoyé sur l'étage inférieur de la troisième sous-colonne.

On obtient ainsi une nouvelle tour de Rokhlin, de hauteur

$$h_{n+1} = 3h_n + 1,$$

dont les niveaux sont des intervalles de même longueur partitionnant  $[0, \theta_{n+1}\ell)$ , avec

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{3^{n+1}}.$$

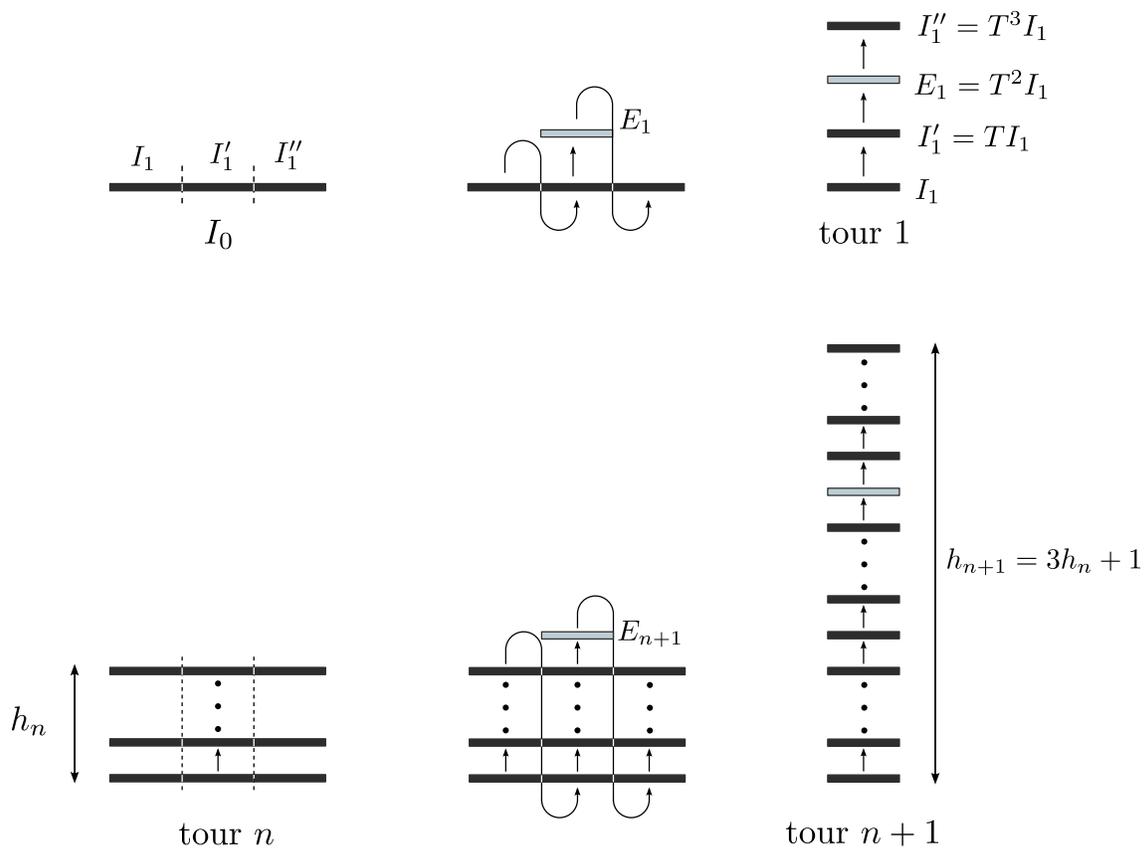


FIGURE 1 – Construction de la transformation de Chacon par découpage et empilage

On a  $\theta_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 1 + 1/3 + 1/9 + \dots = 3/2$ , et en choisissant  $\ell = 2/3$  on obtient  $\theta_\infty \ell = 1$ . En poursuivant la construction inductivement pour tout entier  $n \geq 1$ , on obtient finalement une transformation inversible  $T$  de  $[0, 1)$  dans lui-même qui préserve la mesure de Lebesgue, appelée *transformation de Chacon*. Dans la suite de cette section,  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  désigne le système dynamique ainsi obtenu :  $X = [0, 1)$ ,  $\mathcal{A}$  est la tribu des boréliens et  $\mu$  la mesure de Lebesgue.

Ce système dynamique possède de nombreuses propriétés intéressantes. En particulier, comme nous allons le voir maintenant, il fournit un exemple faiblement mélangeant, mais pas mélangeant.

### 3.2 La transformation de Chacon n'est pas mélangeante

Il est assez facile de comprendre pourquoi la transformation de Chacon n'est pas mélangeante. En effet, commençons par observer que si  $A$  est un étage de la tour  $n$ , alors

$$\mu(A \cap T^{h_n} A) \geq \mu(A)/3, \quad (6)$$

car la partie de  $A$  contenue dans la première des 3 sous-colonnes de la tour  $n$  revient complètement dans  $A$  après  $h_n$  itérations de la transformation  $T$ . Cela reste évidemment vrai si  $A$  est une réunion d'étages de la tour  $n$ . Fixons maintenant un entier  $m$ , assez grand pour qu'un étage de la tour  $m$  ait une mesure inférieure à  $\frac{1}{100}$ . Soit  $A$  un étage de cette tour. Par construction,  $A$  est aussi une réunion d'étages de la tour  $m+1$ , et c'est aussi une réunion d'étages de la tour  $n$  pour chaque  $n \geq m$ . On en déduit que (6) est valable pour tout  $n \geq m$ , ce qui empêche le mélange (si  $T$  était mélangeant, on aurait  $\mu(A \cap T^{h_n} A) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu(A)^2 \leq \mu(A)/100$ ).

### 3.3 La transformation de Chacon est faiblement mélangeante

Pour prouver l'ergodicité, puis le mélange faible pour la transformation de Chacon, on aura besoin d'une propriété essentielle pour toutes les constructions de ce type. Cette propriété est contenue dans le lemme suivant, dont la preuve détaillée est laissée en exercice.

**Lemme 3.1.** *Pour tout ensemble borélien  $A \subset X$  et tout  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $n \geq 1$  assez grand il existe un ensemble  $A_n$  réunion d'étages de la tour  $n$  tel que*

$$\mu(A \Delta A_n) < \varepsilon.$$

*De plus, pour tout  $p \geq 1$ , tout  $f \in L^p(\mu)$  et tout  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $n \geq 1$  assez grand il existe une fonction simple  $f_n$ , constante sur les étages de la tour  $n$ , telle que*

$$\|f - f_n\|_p < \varepsilon.$$

*Arguments pour la preuve.* Tout ensemble borélien dans  $[0, 1)$  peut être arbitrairement bien approché (au sens de la mesure de la différence symétrique) par une union finie d'intervalles, et chaque intervalle peut être arbitrairement bien approché par une union d'étages de la tour  $n$  pour  $n$  assez grand. (Les étages de la tour  $n$  sont des intervalles dont la taille tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ , et qui recouvrent une proportion arbitrairement grande de  $[0, 1)$ .) Enfin, toute fonction  $f$  dans  $L^p(\mu)$  peut être arbitrairement bien approchée (au sens  $L^p$ ) par une fonction simple.  $\square$

**Proposition 3.2.** *La transformation de Chacon est ergodique.*

*Démonstration.* Soit  $A$  un ensemble invariant par  $T$ , et  $n \geq 1$ . Notons  $\alpha_n := \mu(A \cap I_n) / \mu(I_n)$ , où  $I_n$  est l'intervalle de base de la tour  $n$ . Puisque  $A$  est invariant, on a aussi pour tout  $0 \leq j \leq h_n - 1$ ,  $\mu(A \cap T^j I_n) / \mu(T^j I_n) = \alpha_n$ . Alors, en notant  $\delta_n := \min(\alpha_n, 1 - \alpha_n)$ , on voit que si  $A_n$  est une réunion d'étages de la tour  $n$ , on a toujours

$$\mu(A \triangle A_n) \geq h_n \mu(I_n) \delta_n.$$

Comme  $h_n \mu(I_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ , on voit par le lemme 3.1 que  $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . On en déduit facilement que  $\mu(A) = 0$  ou  $1$ .  $\square$

**Proposition 3.3.** *La transformation de Chacon est faiblement mélangente*

*Démonstration.* Puisque l'on sait déjà que  $T$  est ergodique, il suffit de montrer que la seule valeur propre pour  $U_T$  est 1. Soit donc  $\alpha$  une valeur propre pour  $U_T$ , et soit  $f$  une fonction propre associée. Puisque  $T$  est ergodique,  $|f|$  est constant et on peut supposer  $|f| = 1$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . En utilisant le lemme 3.1, pour tout  $n$  assez grand on trouve une fonction simple  $f_n$  constante sur les étages de la tour  $n$  avec

$$\|f - f_n\|_1 < \varepsilon.$$

Comme  $f$  est de module 1, on peut supposer aussi que les valeurs prises par  $f_n$  sont de module 1. Notons aussi que par invariance de la mesure, on a pour tout entier  $k$

$$\left\| f \circ T^k - f_n \circ T^k \right\|_1 < \varepsilon.$$

On peut alors écrire, par l'inégalité triangulaire, pour tout entier  $k$

$$\left\| f_n \circ T^k - \alpha^k f_n \right\|_1 \leq \left\| f_n \circ T^k - f \circ T^k \right\|_1 + \left\| f \circ T^k - \alpha^k f \right\|_1 + \left\| \alpha^k f - \alpha^k f_n \right\|_1 < 2\varepsilon. \quad (7)$$

Appelons  $C_n^1$  (respectivement  $C_n^2$ ) la première (respectivement la seconde) sous-colonne de la tour  $n$  définies dans la construction de la transformation de Chacon par découpage et empilage. On a

$$\mu(C_n^1) = \mu(C_n^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1/3.$$

Par ailleurs, puisque  $f_n$  est constante sur les étages de la tour  $n$ , on a  $f_n \circ T^{h_n} = f_n$  sur  $C_n^1$  et  $f_n \circ T^{h_n+1} = f_n$  sur  $C_n^2$ . On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \left\| f_n \circ T^{h_n} - \alpha^{h_n} f_n \right\|_1 &\geq \int_{C_n^1} |f_n| \left| 1 - \alpha^{h_n} \right| d\mu + \int_{C_n^2} |f_n| \left| 1 - \alpha^{h_n+1} \right| d\mu \\ &= \mu(C_n^1) \left( \left| 1 - \alpha^{h_n} \right| + \left| 1 - \alpha^{h_n+1} \right| \right). \end{aligned}$$

En utilisant (7), et le fait que  $\varepsilon$  peut être choisi arbitrairement petit, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{h_n+1} = 1,$$

et donc  $\alpha = 1$ .  $\square$